

Kapitel 7

Der Frequenzkamm

Während man Frequenzen im Bereich bis zu 100 GHz mit elektronischen Zählern sehr zuverlässig bestimmen kann, ist die Messung absoluter optischer Frequenzen von mehreren 100 THz immer noch eine Herausforderung. Der jüngst entwickelte Frequenzkamm, für den T.W. Hänsch und J.L. Hall im Jahr 2004 den Nobelpreis bekamen, revolutioniert die Messung absoluter optischer Frequenzen und beeinflusst viele Bereiche der Laserspektroskopie. Seine Grundlagen sollen im Folgenden kurz erläutert werden. Als Literatur seien in diesem Zusammenhang der Artikel von Th. Udem, R. Holzwarth und T.W. Hänsch im Physik Journal [Udem02] empfohlen, aus dem auch Teile des folgenden Textes entnommen sind.

In einem modengekoppelten Laser addieren sich die longitudinalen Moden, so dass sich ein kurzer Puls ergibt. Dieser Puls läuft zwischen den Endspiegeln des Laserresonators umher und man erhält nach jedem Umlauf eine Kopie des Pulses am Auskoppelspiegel. Das Spektrum eines modengekoppelten Lasers besteht demnach aus einem Kamm von Laserfrequenzen, die mit den aktiven Moden identifiziert werden können. Wie wir bereits gesehen haben, ermöglicht das Verfahren der Kerr-Linsen Modenkopplung mit einem Titan-Saphir-Kristall als Lasermedium und resonatorinterner Kompensation der Gruppengeschwindigkeitsdispersion auf recht einfache Weise die Erzeugung von Pulsen von nur wenigen Femtosekunden Dauer.

7.1 Das Frequenzspektrum modengekoppelter Pulse

Frequenzkämme sind spezielle modengekoppelte Pulslaser, die sich aufgrund ihres sehr gut kontrollierbaren Frequenzspektrums zum präzisen Vergleichen von Frequenzen eignen. Insbesondere machen sie es möglich, ganzzahlige Vielfache von RF-Frequenzen mit optischen Frequenzen zu vergleichen, und haben damit die Messung der Frequenzen von Laserlicht revolutioniert.

Im Resonator eines modengekoppelten Lasers läuft, wie in Abbildung 7.1 skizziert, ein einzelner Puls der Trägerfrequenz ν_c mit der Gruppengeschwindigkeit v_g um. Die Gesamtlänge des Resonators l_r wird in der Zeit $\tau = \frac{l_r}{v_g}$ durchlaufen. In diesen Intervallen werden die Pulse, deren Dauer in der Größenordnung einiger weniger Perioden der Trägerfrequenz liegen, durch den Auskoppelspiegel transmittiert. Das elektrische Feld $E_1(t)$ eines einzelnen Pulses an einem festen Ort lässt sich durch das Produkt der Einhüllenden $\hat{E}(t)$ und der Oszillation der Trägerfrequenz darstellen:

$$E_1(t) = \hat{E}(t)e^{i(2\pi\nu_c t)}. \quad (7.1)$$

Die Gruppengeschwindigkeit v_g ist die Propagationsgeschwindigkeit der Einhüllenden, die Phasengeschwindigkeit v_p die Propagationsgeschwindigkeit eines Nulldurchganges des elektrischen Feldes. Da aufgrund der Dispersion der optischen Elemente im Resonator $v_g \neq v_p$

ist, verändert sich ϕ_0 zwischen zwei Pulsen um die Phasenverschiebung

$$\Delta\varphi = \left(\frac{1}{v_g} - \frac{1}{v_p} \right) l_r 2\pi\nu_c \bmod 2\pi. \quad (7.2)$$

Der gesamte Pulszug an einem festen Ort wird mit dem elektrischen Feld

$$\begin{aligned} E(t) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{E}(t - n\tau) e^{i(2\pi\nu_c t - n2\pi\nu_c \tau + n\Delta\varphi)} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{E}(t - n\tau) e^{i(2\pi\nu_c t + n(\Delta\varphi - 2\pi\nu_c \tau))} \end{aligned} \quad (7.3)$$

beschrieben. Dabei ist n die Nummer des Pulses und $\hat{E}(t)$ die Einhüllende eines einzelnen Pulses. Es kann gezeigt werden, dass sich die Fouriertransformierte von $E(t)$, $\tilde{E}(\nu)$ als Summe

$$\tilde{E}(\nu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i(n\Delta\varphi - n2\pi\nu\tau)} \tilde{E}(\nu - \nu_c) \quad (7.4)$$

schreiben lässt. Hier ist $\tilde{E}(\nu)$ die Fouriertransformierte von $\hat{E}(t)$. Sie stellt die Einhüllende des Frequenzspektrum der Breite $\Delta\nu$ dar. Je kürzer die Dauer der Pulse $\tau = \frac{1}{\Delta\nu}$, desto breiter die Einhüllende. Anders gesagt: Um kurze Pulse zu ermöglichen, wird ein breites Verstärkungsspektrum des aktiven Mediums benötigt.

Die Funktion (7.4) kann nur für Funktionswerte ungleich Null sein, bei denen sich die Exponentialfunktion kohärent addiert, also die Bedingung

$$\nu = \nu_m \equiv \frac{\Delta\varphi}{\tau 2\pi} - \frac{m}{\tau} \quad \text{oder} \quad (7.5)$$

$$\equiv \nu_{\text{CE}} + m\nu_{\text{rep}} \quad (7.6)$$

erfüllt ist. Hier ist $\nu_{\text{rep}} = \frac{1}{\tau}$ die Repetitionsrate, m die Modennummer mit $m \in \mathbb{N}_0$ und

$$\nu_{\text{CE}} = \frac{\Delta\varphi \nu_{\text{rep}}}{2\pi} \quad (7.7)$$

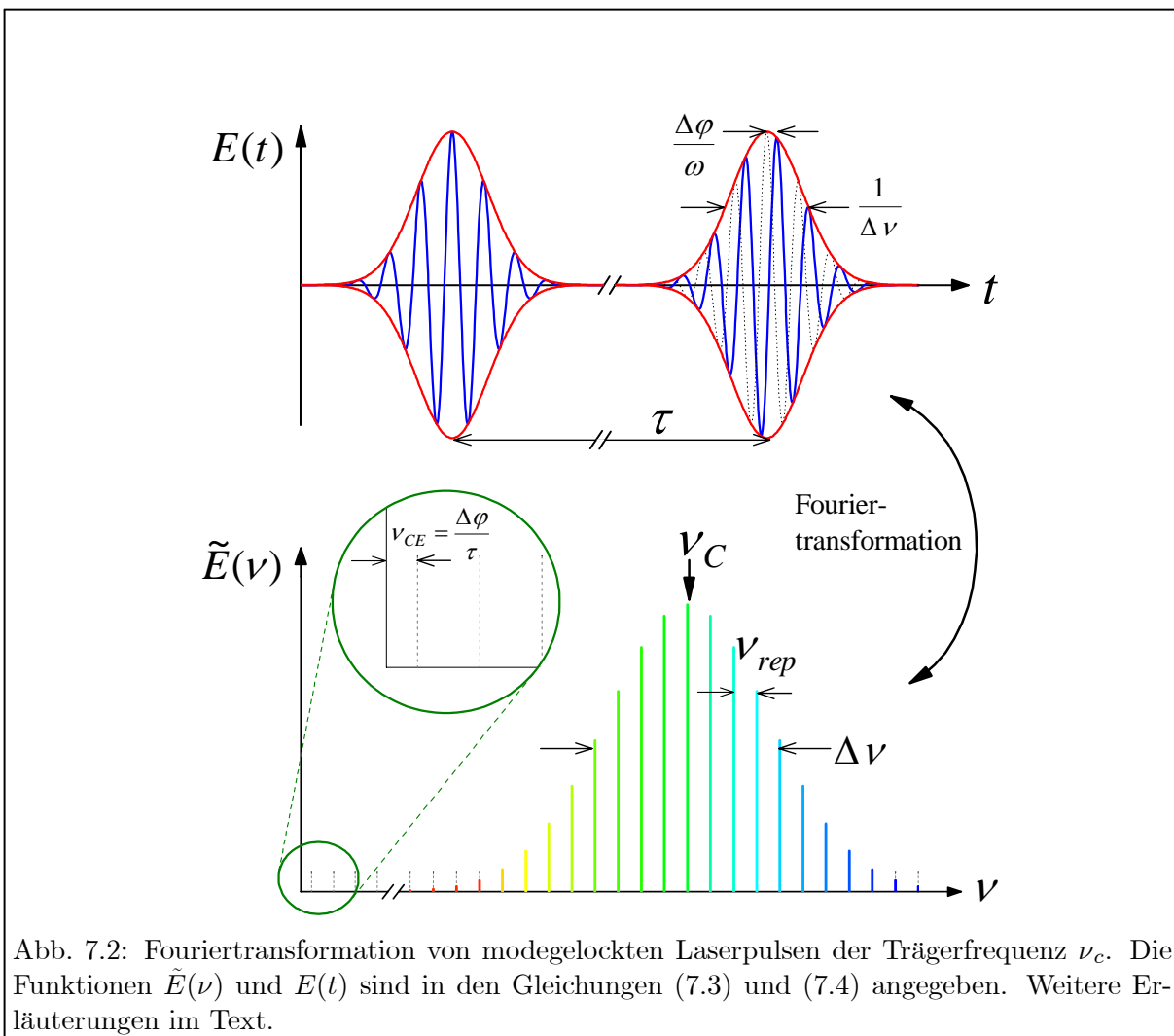
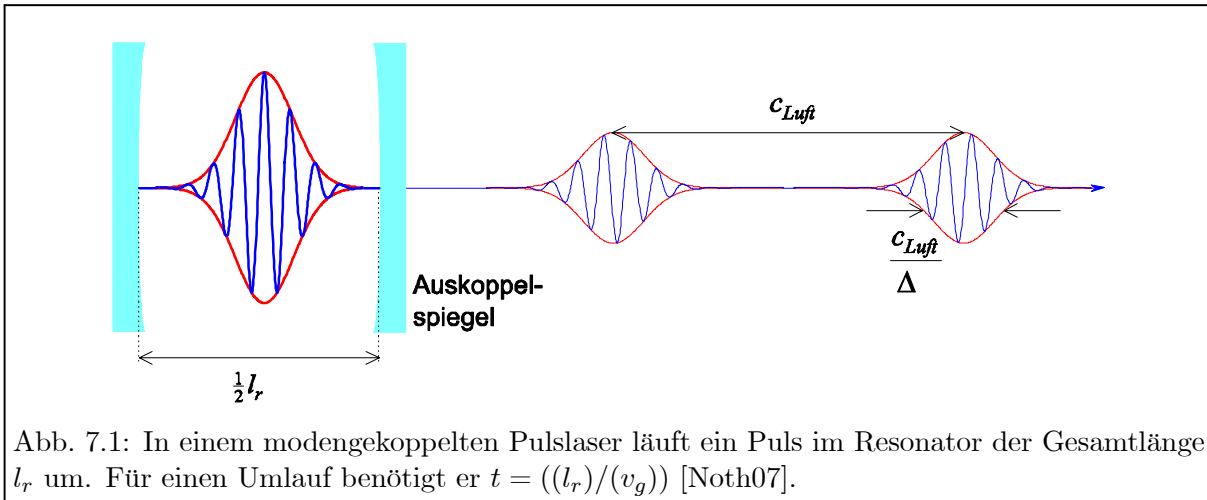
die Phasenschlupffrequenz (engl. *Carrier Envelope Offset*, CE, CEO). Je nach Vorzeichen von $\Delta\varphi$ kann auch ν_{CE} positiv oder negativ sein. In Abbildung 7.2 ist der Zusammenhang zwischen Frequenz- und Zeitdarstellung verdeutlicht. Für eine Repetitionsrate $\nu_{\text{rep}} = 100$ MHz, und der Wellenlänge $\lambda \approx 1000$ nm ist $m \approx 3 \cdot 10^6$. Sind ν_{CE} , ν_{rep} und m bekannt, kann man mit Gleichung (7.6) die genaue Frequenz der Mode angeben.

7.2 Ableitung des Modenkamms aus den Resonator-Randbedingungen

Die Moden eines Lasers müssen den Randbedingungen des Resonators mit der Länge L genügen:

$$2k(\omega_n)L = 2\pi n + \Delta\Phi_n \quad (7.8)$$

Hierbei ist n eine große ganze Zahl, die in dieser Formel die Anzahl der Halbwellen im Resonator angibt. Außerdem ist $\Delta\Phi_n$ eine zusätzliche Phasenverschiebung, die durch Beugung (Guoy Phase) und durch die dielektrischen Schichten der Resonatorspiegel verursacht wird und möglicherweise von der Wellenlänge, also von n , abhängt. Diese Phasenverschiebung ist in der



Praxis schwer zu bestimmen. Sie führt dazu, dass die Frequenzen der Lasermoden n nicht einfach ein ganzzahliges Vielfaches des freien Spektralbereichs $\text{FSR } 2\pi c/2Ln_b(\omega_n)$ mit dem Brechungsindex n_b sind, sondern vielmehr

$$\omega_n = (2\pi n + \Delta\Phi_n) \frac{c}{2Ln_b(\omega_n)} \quad (7.9)$$

gilt. Diese Größe ist, nicht zuletzt wegen ihrer Wellenlängenabhängigkeit, für Präzisionsanwendungen ungeeignet und wird daher im Folgenden vermieden.

Um den Abstand zwischen benachbarten Moden unter Berücksichtigung der Dispersion genauer zu untersuchen, ist die folgende Entwicklung des Wellenzahlvektors um eine zentrale Mode m nützlich

$$2L \left[k(\omega_m) + k'(\omega_m)(\omega_n - \omega_m) + \frac{k''(\omega_m)}{2}(\omega_n - \omega_m)^2 + \dots \right] = 2\pi n + \Delta\Phi_n \quad (7.10)$$

Den Modenabstand $\omega_r \equiv \omega_{n+1} - \omega_n$ erhält man, indem diese Gleichung für n von derselben Gleichung für $n + 1$ abgezogen wird:

$$\left[k'(\omega_m)\omega_r + \frac{k''(\omega_m)}{2} ((\omega_{n+1} - \omega_m)^2(\omega_n - \omega_m)^2) + \dots \right] = \pi/L + (\Delta\Phi_{n+1} - \Delta\Phi_n)/2L. \quad (7.11)$$

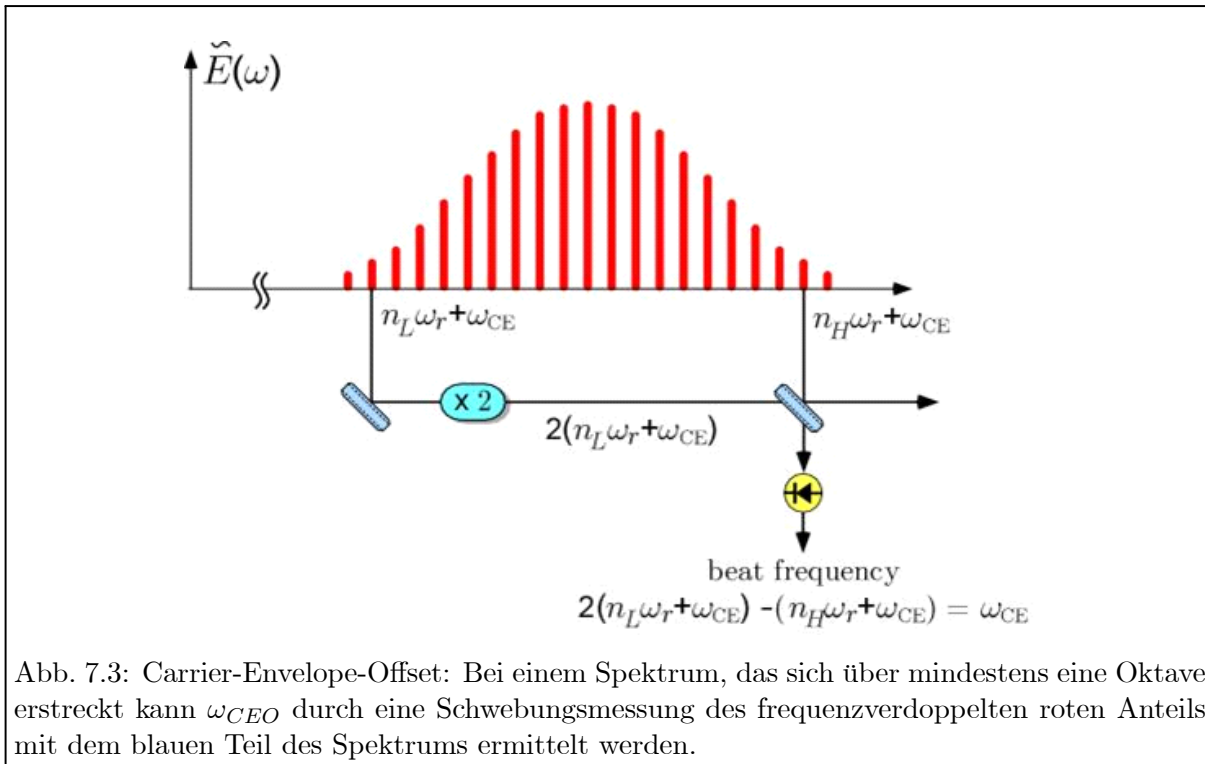
Einen konstanten Modenabstand, wie bei den Kammgeneratoren, erhält man, falls dieser Ausdruck, nach ω_r aufgelöst, unabhängig von n ist. Dies ist der Fall, falls alle Beiträge in der Entwicklung von $k(\omega)$, bis auf den konstanten Term $k(\omega_m)$ und den Gruppengeschwindigkeitsterm $v_g^{-1} = k'(\omega_m)$, exakt verschwinden. Außerdem darf die Differenz $\Delta\Phi_{n+1} - \Delta\Phi_n$ nicht von n abhängen. Die zentrale Aussage ist nun, dass die Terme, die einen nicht äquidistanten Frequenzkamm bewirken würden, dieselben sind, die auch einen gespeicherten Puls verformen bzw. zerfließen lassen. Wobei eine im Vergleich zu den optischen Frequenzen winzige Unregelmäßigkeit von zum Beispiel 1 Hz den Puls bereits nach etwa 1 s zerstören sollte. Die Beobachtung einer konstanten Pulseinhüllenden ist daher ein experimentelles Indiz für das Verschwinden dieser Terme. Der Modenabstand $\omega_r = 2v_g/2L$ ergibt sich sehr anschaulich aus der inversen Pulsumlaufzeit $T^{-1} = v_g/2L = \omega_r/2$ und ist somit identisch mit der Pulswiederholrate¹. Diese ist experimentell äußerst leicht zugänglich. Die Willkur bei der Wahl von ω_m verschwindet, wenn man statt $v_g^{-1} = k'(\omega_m)$ zu berechnen, einen experimentellen Wert für ω_r verwendet.

Im Experiment beobachtet man auch nach Stunden kein Zerfließen eines einmal gespeicherten Pulses. Dieses Wellenpaket hat also Soliton-Eigenschaften. Offensichtlich zieht das Verkoppeln der Moden zu einem Puls die nicht ganz regelmäßig angeordneten Moden des kalten Laserresonators auf ein streng periodisches Gitter im Frequenzraum. Dadurch ergibt sich eine weitere, schwer zu kontrollierende Frequenzverschiebung in (7.9), die verschieden ausfällt, je nachdem, wie die Irregularitäten ausgeglichen werden. Daher schreiben wir allgemeiner statt (7.9)

$$\omega_n = n\omega_r + \omega_{CE} \quad (7.12)$$

mit einem zunächst unbekanntem Frequenzoffset ω_{CE} . Die Moden wollen wir so nummerieren, dass $0 \leq \omega_{CE} \leq \omega_r$ gilt. Die Kernaussage von (7.9) ist, dass alle Moden den gleichen Abstand zu ihren nächsten Nachbarn haben (n ist eine ganze Zahl), und dass dieser Abstand durch die leicht zu messende Pulswiederholrate gegeben ist. Des weiteren ist der sich so ergebende Frequenzkamm um ω_{CE} gegen die Harmonischen der Pulswiederholrate verschoben.

¹ACHTUNG: Der freie Spektralbereich ist in fast allen Lehrbüchern (auch in diesem Skript) als die inverse Phasenumlaufzeit $v_p/2L$ mit $v_p = c/n_b(\omega)$ anstelle der inversen Gruppenumlaufzeit $v_g/2L$ definiert und berücksichtigt daher nicht die Dispersion.



7.3 Bestimmung des Carrier-Envelope-Offset

Alle Kammmoden können in ihrer Frequenz stabilisiert werden, wenn die Repetitionsrate und die Offsetfrequenz konstant gehalten werden. Die Repetitionsrate kann leicht mit einer Photodiode gemessen und dann durch die Anpassung der Resonatorlänge stabilisiert werden. Hingegen ist eine Messung des CEO wesentlich schwieriger. Die zugrundeliegende Idee ist in Abb. 7.3 [Udem02] dargestellt.

Wenn das Kammspektrum sich über mehr als eine Oktave erstreckt d.h. es Frequenzen ω_L und Frequenzen die größer sind als $2\omega_L$ beinhaltet, so ist es möglich, den roten Teil des Spektrums zu isolieren und durch einen Frequenzverdoppler zu schicken. Aus der Frequenz ω_L wird dann

$$2\omega_L = 2(n_L \times \omega_r + \omega_{CEO}). \quad (7.13)$$

Überlagert man nun das rote Licht wieder mit dem blauen Teil des Spektrums, der die Frequenz

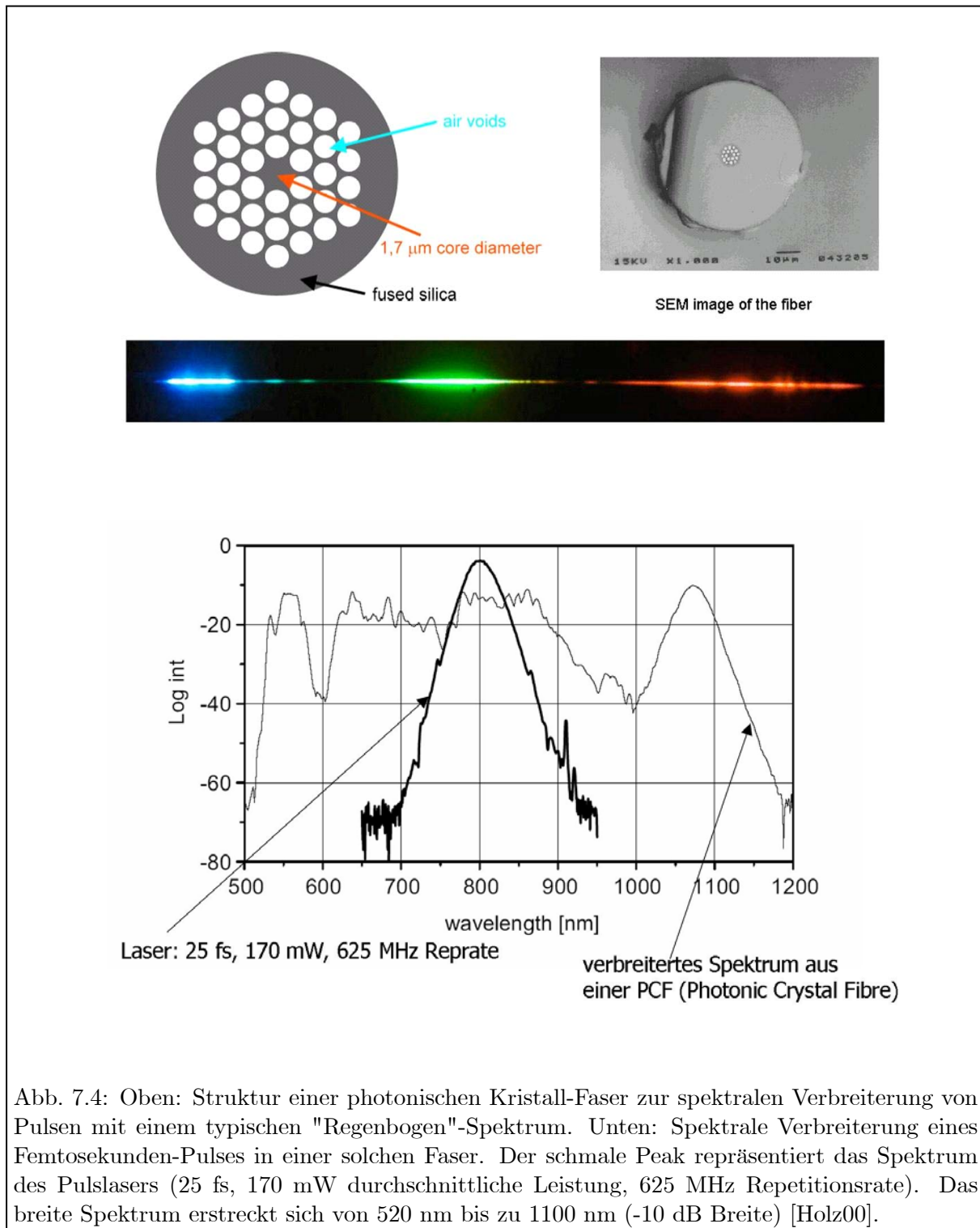
$$\omega_H = n_H \times \omega_r + \omega_{CEO} = 2n_L \times \omega_r + \omega_{CEO} \quad (7.14)$$

enthält, so kann ω_{CEO} als Schwebungsfrequenz (Beatfrequenz) auf einer Photodiode gemessen werden. In vielen Fällen kann der Carrier-Envelope-Offset im Laserresonator durch die Variation der Pumpleistung verändert und dadurch die Offsetfrequenz stabilisiert werden.

Die optische Frequenz einer jeden Mode des Kamms kann als einfache Funktion zweier Radiofrequenzen geschrieben werden

$$\omega_n = n\omega_r + \omega_{CEO}, \quad \omega_{CEO} \leq \omega_r \quad (7.15)$$

wobei n eine große Zahl (bis zu 10^6) ist und die n -te Mode des Kamms darstellt. Damit kann im gesamten vom Kamm abgedeckten Frequenzbereich ein kontinuierlicher Laser auf den Kamm phasenstabilisiert werden.



Als Referenz für die beiden Radiofrequenzen ω_r und ω_{CEO} dienen üblicherweise Rubidium- oder Cäsiumuhren oder ein Wasserstoffmaser, abhängig von der benötigten Genauigkeit. Die Präzision dieser Uhren wird damit direkt in den optischen Bereich übersetzt.

7.3.1 Erzeugung und Stabilisation eines Frequenzkamms

Um einen Frequenzkamm nach dem eben geschilderten Prinzip erzeugen und stabilisieren zu können, ist es zunächst erforderlich ein Spektrum mit einer Breite von mehr als einer Oktave zu produzieren. Dazu verwendet man in den meisten Fällen sogenannte "Photonische-Kristallfasern" (Photonic Crystal Fibers, PCF), speziell solche, die das Licht stark führen d.h. es auf einem sehr kleinen Durchmesser bündeln. Eine photonische Kristallfaser besteht aus einem Array von luftgefüllten Kanälen, die sich parallel um den Faserkern herum erstrecken und die ganze Faser durchziehen. Eine elektronenmikroskopische Aufnahme des Querschnitts einer solchen Faser ist in Abb. 7.4 gezeigt. Der große Kontrast im Brechungsindex zwischen dem Faserkern aus Siliziumdioxid und dem "löchrigen" Fasermantel (engl. cladding) führt zum starken Einschluss des Lichtes. Durch Variationen der Lochstruktur kann die Charakteristik dieser Fasern in weitem Umfang geändert werden. Für die spektrale Verbreiterung von Femtosekunden-Pulsen werden Fasern mit Kerndurchmessern von 1-2 μm verwendet. Die dadurch erreichten hohen Intensitäten führen zu einer ganzen Reihe nichtlinearer Effekte, die zur gewünschten spektralen Verbreiterung führen (Stichworte: Selbstphasenmodulation, stimulierte Raman und Brillouin Streuung). Beispielhaft ist das Ergebnis einer solchen Verbreiterung im unteren Graphen in Abb. 7.4 dargestellt. Ausgehend von einer spektralen Breite in der Größenordnung von 100 nm, ergibt sich ein verbreitertes Spektrum von 520 nm bis 1100 nm, welches sich für die Bestimmung von ω_{CEO} eignet.

Um die Frequenzen der Moden des so erzeugten Frequenzkamms zu stabilisieren, kann man einen Aufbau verwenden, wie er in Abb. 7.5 gezeigt ist: Zunächst wird die Repetitionsrate direkt mit einer Photodiode gemessen und durch die Anpassung der Resonatorlänge des Ti:Sa-Lasers und damit der Umlaufzeit des Pulses konstant gehalten. Der Laserstrahl für die Detektion von ω_{CEO} wird zunächst an einem dichroitischen Strahlteiler aufgeteilt. Dieser Strahlteiler transmittiert den infraroten Anteil des Spektrums, der dann frequenzverdoppelt wird, und reflektiert den grünen Anteil, der nach einer Verzögerungsstrecke wieder mit dem frequenzverdoppelten infraroten Anteil überlagert wird. Die Notwendigkeit der Verzögerungsstrecke ist in der Zeitdomäne leicht einzusehen, muss doch der Puls mit dem grünen Anteil gemeinsam mit dem infraroten Puls bei der Photodiode eintreffen. Ein Gitter wirkt als Bandpass, um überlappende Bereiche des Spektrums auszuwählen und auf die Photodiode zur Messung des Schwebungssignals zu lenken. Dadurch werden nicht benötigte Anteile des Spektrums abgetrennt und das Rauschen sowie eine mögliche Sättigung der Photodiode durch die zusätzlichen Photonen unterdrückt. Das elektronische Signal der Photodiode enthält nun die Schwebungsfrequenz ω_{CEO} , die mittels elektrischer Filter isoliert und zur Stabilisierung des Carrier-Envelope-Offset verwendet werden kann. Als Regelgröße dient in vielen Fällen die Leistung des Pump lasers, die zur Variation von ω_{CEO} angepasst wird.

7.3.2 Messung einer Laserfrequenz mit einem Frequenzkamm

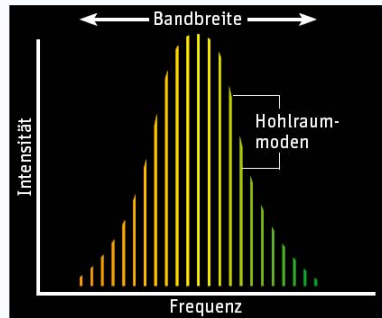
Um die Frequenz eines kontinuierlichen single-mode Lasers mit einem Frequenzkamm zu messen, wird der in Abb. 7.6 dargestellte Aufbau verwendet. Der Laserstrahl des fs-Frequenzkamm wird mit Hilfe eines Polarisations-Strahlteilers mit dem zu messenden Laserstrahl überlagert. Da die Polarisierungsebenen der beiden Laserstrahlen nun senkrecht zueinander sind und auf diese Weise kein Schwebungssignal erzeugt werden kann, benutzt man noch eine $\lambda/2$ -Platte und einen weit-

EXKURS: Superkontinuum (entnommen aus: Spektrum der Wissenschaft, März 2007)

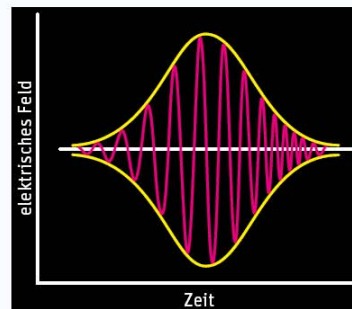
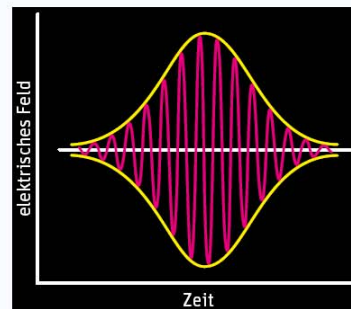
GEPULSTE LASER EMITTIERTEN LICHTBLITZE in einem engen Frequenzbereich. Wenn ein genügend intensiver Puls eine Glasfaser durchläuft, treten gewisse nichtlineare Prozesse auf, unter anderem die so genannte Selbstphasenmodulation. Diese Prozesse erzeugen zusätzliche Lichtfrequenzen und liefern schließlich ein Superkontinuum mit breitem Spektrum.

FREQUENZKAMM

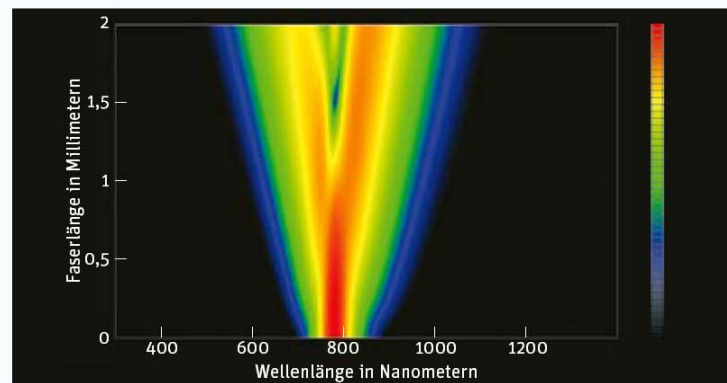
Gepulste Laser emittieren eine wiederkehrende Pulsfolge. Jeder Puls ist die Summe vieler Teilstrahlen unterschiedlicher Frequenz. Das Spektrum der Pulsserie bildet einen Frequenzkamm – eine gleichmäßige Anordnung diskreter Frequenzen.

**SELBSTPHASENMODULATION**

Die elektromagnetischen Schwingungen eines Laserpulses (links, pink) haben konstante Wellenlänge, doch die Intensität steigt und fällt gemäß einer Hüllkurve (gelb). Ein Puls mit hoher Spitzenintensität kann die Brechzahl des Mediums momentan um einen Betrag erhöhen, der proportional zur augenblicklichen Intensität ist. Da die Brechzahl des Mediums zeitlich variiert, verändert sie ihrerseits die Phase der Welle, das heißt die Lage der Wellenberge und -täler. So entstehen neue Wellenlängen und Frequenzen.

**Spektralverbreiterung**

Diese Simulation eines 20 Femtosekunden (2×10^{-14} Sekunden) langen Pulses auf seinem Weg durch eine Glasfaser zeigt, wie nichtlineare Effekte – insbesondere die Selbstphasenmodulation – das Pulsspektrum verbreitern. Die Farben stellen die Lichtintensität bei jeder Wellenlänge auf einer logarithmischen Skala dar; rot entspricht hoher Intensität. In diesem Beispiel erstreckt sich das Spektrum nach zwei Millimeter Wegstrecke über eine Oktave. Wie in der Musik reicht eine Lichtoktave von einer Frequenz bis zum Doppelten dieser Frequenz.



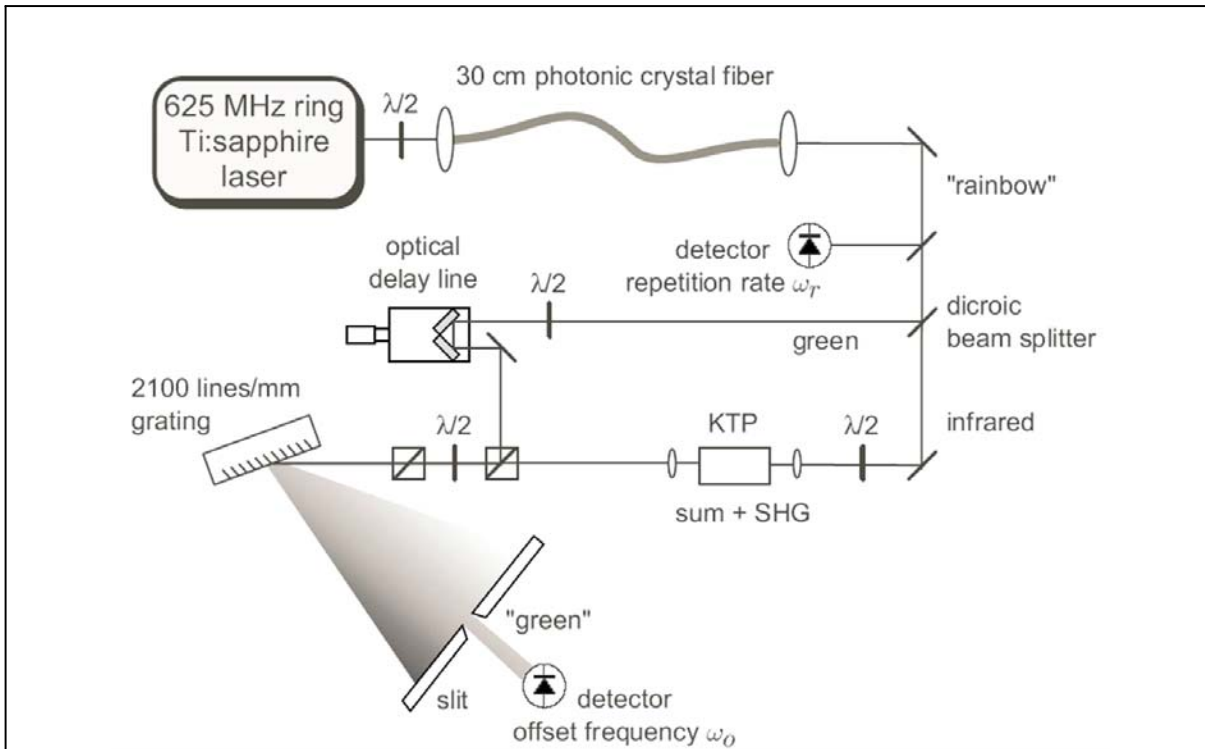


Abb. 7.5: Detektion von ω_r und ω_{CEO} eines Frequenzkamms: Nach der spektralen Verbreiterung des Femtosekunden-Titan:Saphir-Lasers wird die Repetitionsrate direkt mit einer Photodiode gemessen während der Laserstrahl für die Detektion von ω_{CEO} zunächst an einem dichroitischen Strahlteiler aufgeteilt wird. Nach einer Verzögerungsstrecke wird der grüne Anteil des Spektrums mit dem frequenzverdoppelten infraroten Anteil überlagert und mittels eines Gitters auf eine Photodiode zur Messung des Schwebungssignals gelenkt.

eren Polstrahlteiler um die beiden Strahlen zu mischen. Danach werden sie über ein optisches Gitter auf eine Photodiode gesendet. Das Gitter separiert den für die Messung der Schwebungsfrequenz nützlichen Teil des Kammspektrums von den überflüssigen Anteilen, die nur zu einem größeren Rauschen der Photodiode führen würden. Das Signal der Avalanche Photodiode wird nun über einen Tiefpass, mit einer Grenzfrequenz kleiner als der halbe Modenabstand (=Repetitionsrate), einem Radiofrequenzzähler zugeführt. Damit kann die Schwebungsfrequenz des Lasers mit der am nächsten liegenden Kammmode ω_{Beat} bestimmt werden. Um die Absolutfrequenz des Lasers zu erhalten, kann durch eine "Grobmessung" der Laserfrequenz (beispielsweise mit einem Wavemeter ausreichender Auflösung (also besser als der halbe Modenabstand) die zugehörige Mode n bestimmt werden. Daraus ergibt sich dann die Absolutfrequenz

$$\omega_{\text{Laser}} = n \times \omega_r \pm \omega_{\text{CEO}} \pm \omega_{\text{Beat}}. \quad (7.16)$$

Das Vorzeichen bei der Schwebungs- und der CEO Frequenz hängt davon ab, ob die Schwebung mit einer im Frequenzraum oberhalb oder unterhalb liegenden Mode erfolgt. Es sei hier nur angemerkt, dass man dies durch eine Variation der Repetitionsrate oder des CEO bestimmen kann und die Frequenz des Lasers damit eindeutig festgelegt ist.

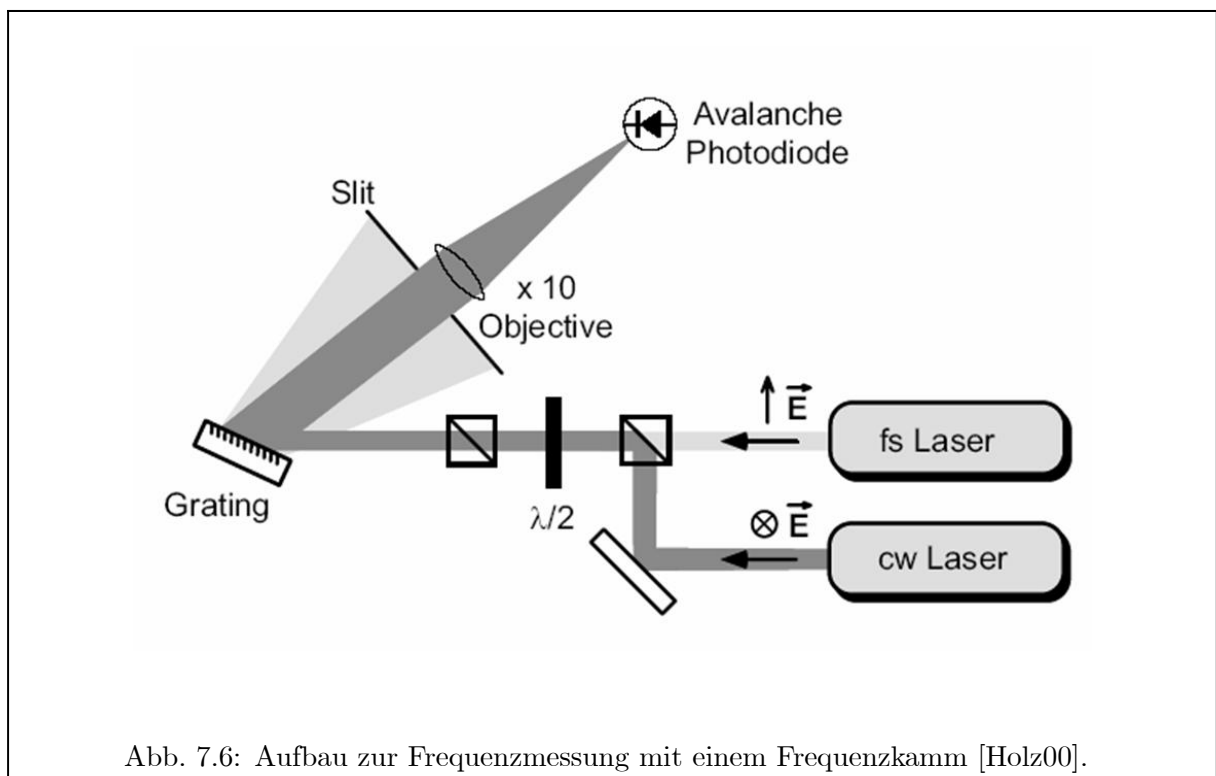


Abb. 7.6: Aufbau zur Frequenzmessung mit einem Frequenzkamm [Holz00].