Thomsonsche Schwingungsgleichung

Mit der **Thomsonschen Schwingungsgleichung** lässt sich die Resonanzfrequenz f_0 eines Schwingkreises mit der Kapazität C und der Induktivität L berechnen. Sie wurde 1853 von dem britischen Physiker William Thomson, dem späteren Lord Kelvin, entdeckt.

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Oder umgeformt für die Schwingungszeit:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

Herleitung

Im Resonanzfall ist der Resonanzwiderstand so groß wie der Serienwiderstand. Der kapazitive Widerstand des Kondensators und induktiver Widerstand der Spule innerhalb des Schwingkreises kompensieren sich auf null.

$$X_L - X_C = 0$$

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$$

$$2\pi f_0 L = \frac{1}{2\pi f_0 C}$$, da gilt $\omega = 2\pi f$

$$f_0^2 = \frac{1}{4\pi^2 LC}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$, üblich ist auch die Form: $$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Herleitung nach dem Energieerhaltungssatz

Betrachten wir den elektrischen Schwingkreis als ein geschlossenes System, so ist die Summe aller Energieformen in diesem System zu jeder Zeit t konstant.

$$E_{\mathrm{mag}}(t) + E_{\mathrm{el}}(t) = E_{\mathrm{Gesamt}}$$

E_{mag}: magnetische Feldenergie der Spule

E_{el}: elektrische Feldenergie des Kondensators

E_{Gesamt}: Gesamtenergie des Systems (konstant)

Setzt man die entsprechenden Formeln ein, so kommt man auf folgende Differentialgleichung:

$$\frac{1}{2}LI^2(t) + \frac{1}{2C}Q^2(t) = E_{\text{Gesamt}}$$

Aus

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \dot{Q}(t)$$

folgt:

$$\frac{1}{2}L\dot{Q}^2(t) + \frac{1}{2C}Q^2(t) = E_{\text{Gesamt}}$$

Nun leitet man diese Gleichung nach der Zeit ab und erhält:

$$L\dot{Q}\ddot{Q}(t) + \frac{1}{C}Q\dot{Q}(t) = 0$$

$$I(t)\left(L\ddot{Q} + \frac{1}{C}Q(t)\right) = 0$$

$$L\ddot{Q} + \frac{1}{C}Q(t) = 0$$, da im Schwingkreis gilt: $I(t) \neq 0$.

Um diese Gleichung zu lösen, müssen wir einen Zusammenhang zwischen $Q(t)$ und $\ddot{Q}(t)$ herstellen. Dazu verwenden wir eine Sinusfunktion als Lösungsansatz, da sie sich auf Grund ihrer Periodizität gut zur Beschreibung einer Schwingung eignet.

$$Q(t) = \hat{Q} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$
$$\dot{Q}(t) = \omega\hat{Q} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$
$$\ddot{Q}(t) = -\omega^2\hat{Q} \cdot \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 \cdot Q(t)$$

$\hat{Q}$: maximale Ladung (Amplitude)

ω: Kreisfrequenz

φ: Phasenverschiebung

Durch Einsetzen ergibt sich:

$$\frac{1}{C}Q(t) - \omega^2 LQ(t) = 0$$
$$Q(t)\left(\frac{1}{C} - \omega^2 L\right) = 0$$
$$\frac{1}{C} - \omega^2 L = 0$$, da im Schwingkreis gilt: $Q(t) \neq 0$

Daraus folgt mit $\omega = 2\pi f$:

$$\frac{1}{C} - 4\pi^2 f_0^2 L = 0$$
$$f_0^2 = \frac{1}{4\pi^2 LC}$$
$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Die thomsonsche Schwingungsgleichung gilt allerdings nur für Serienschwingkreise und ideale Parallelschwingkreise. Bei komplexeren Topologien gilt es, die Frequenz für die Erfüllung der folgenden Bedingung selbst herzuleiten:

$$X_L = X_C$$

Des Weiteren muss bei der Anwendung der thomsonschen Schwingungsgleichung darauf geachtet werden, dass sich das jeweilige System im Schwingfall befindet – die Dämpfung durch den ohmschen Widerstand also nicht zu groß ist. Bei nicht zu großer Dämpfung kann die beim Parallelschwingkreis veränderte Resonanzfrequenz mit dem Verlustwiderstand R_L von L berechnet werden:

$$\omega_D = \omega_0 \sqrt{1 - R_L^2 \frac{C}{L}}$$