



Berner Fachhochschule



Hochschule für
Technik und Informatik Burgdorf

Mathematik

Analysis

Autor: Niklaus Burren
Datum: 7. September 2004

Inhalt

| | |
|-------------------------------------------------------------|----------|
| 1. Endliche und Unendliche Reihen | 4 |
| 1.1. Definition einer Reihe | 4 |
| 1.2. Arithmetische Reihen | 4 |
| 1.3. Geometrische Reihen..... | 4 |
| 2. Binomische Formeln | 4 |
| 2.1. Pascalsches Dreieck | 4 |
| 2.2. Berechnung | 5 |
| 3. Schieben, Strecken, Spiegeln von Funktionen | 5 |
| 4. Symmetrien von Funktionen | 6 |
| 4.1. Gerade Funktionen..... | 6 |
| 4.2. Ungerade Funktionen..... | 6 |
| 5. Polynome | 6 |
| 5.1. Definition | 6 |
| 5.2. Faktorisierungssatz | 7 |
| 5.3. Newton-Verfahren | 7 |
| 6. Quadratische Funktionen (Parabeln) | 8 |
| 6.1. Hauptform einer Parabel | 8 |
| 6.2. Verschobene Normalparabel | 8 |
| 6.3. Produktform einer Parabel | 9 |
| 7. Quadratische Gleichungen | 9 |
| 7.1. Grundform | 9 |
| 7.2. Lösungsformel..... | 9 |
| 7.3. Diskriminante..... | 9 |
| 8. Differentialrechnung | 9 |
| 8.1. Definition | 9 |
| 8.2. Ableitung elementarer Funktionen | 10 |
| 8.3. Faktorregel | 10 |

| | | |
|------------|-------------------------------------------------------------|-----------|
| 8.4. | Summenregel | 10 |
| 8.5. | Kettenregel | 10 |
| 8.6. | Produktregel | 11 |
| 8.7. | Quotientenregel | 11 |
| 8.8. | Ableitung der Umkehrfunktion | 11 |
| 9. | Integralrechnung | 11 |
| 9.1. | Definition | 11 |
| 9.2. | Berechnung eines bestimmten Integrals | 11 |
| 9.3. | Elementare Integrationsregeln für bestimmte Integrale | 12 |
| 10. | Integrationsmethoden..... | 13 |
| 10.1. | Partielle Integration | 13 |
| 10.2. | Kettenregel als Integrationsregel | 13 |
| 11. | Trägheitsmoment | 14 |
| 11.1. | Definition | 14 |
| 11.2. | Beispiel: Flacher Zylinder | 14 |
| 12. | Numerische Integration | 15 |
| 12.1. | Trapezformel | 15 |
| 12.2. | Simpson Formel | 15 |
| 13. | Lokale Approximation..... | 16 |
| 13.1. | Taylorpolynome | 16 |
| 13.2. | Lineare und Quadratische Näherung: | 16 |
| 13.3. | Taylorreihe | 16 |
| 13.4. | Binomische Reihe | 18 |
| 13.5. | Berechnung von Grenzwerten | 18 |
| 14. | Mehrdimensionale Analysis | 18 |
| 14.1. | Totales Differential | 18 |
| 14.2. | Fehlerfortpflanzung | 19 |
| 14.3. | Extremwertprobleme | 20 |
| 15. | Vektorfelder..... | 21 |
| 15.1. | Definition | 21 |
| 15.2. | Niveau-Mengen | 21 |
| 15.3. | Gradient einer Funktion $P \rightarrow u(P)$ | 21 |
| 15.4. | Linienintegrale | 22 |
| 15.5. | Flächenintegrale..... | 22 |
| 15.6. | Potentiale von Linienintegralen | 24 |
| 15.7. | Satz von Stokes | 25 |
| 15.8. | Satz von Gauss | 25 |
| 16. | Methode der kleinsten Quadrate..... | 26 |
| 16.1. | Regression | 26 |
| 16.2. | Lineare Regression | 26 |
| 16.3. | Approximation über ein Intervall..... | 27 |
| 17. | Fourier-Analyse | 27 |
| 17.1. | Fourierreihen | 27 |
| 17.2. | Satz von Dirichlet | 28 |
| 17.3. | Gibbs-Effekt..... | 28 |
| 17.4. | Symmetrie-Eigenschaften | 28 |
| 17.5. | Geometrische Operationen | 29 |
| 17.6. | Ableiten und Integrieren einer Fourierreihe | 29 |
| 17.7. | Komplexe Fourierreihe | 30 |
| 17.8. | Fourierintegral | 30 |

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 17.9. Verschiebungssatz..... | 31 |
| 18. Diskrete Fouriertransformation | 31 |
| 18.1. DFT- und IDFT-Matrix | 31 |
| 18.2. Eigenschaften der DFT | 32 |
| 18.3. Anwendungen | 34 |
| 19. Fouriertransformation mit MATLAB | 35 |
| 19.1. Koeffizienten mit Trapezintegration berechnet | 35 |
| 19.2. Koeffizienten symbolisch berechnet..... | 36 |
| 19.3. Fourierapproximation mit fft | 36 |
| 19.4. Heaviside..... | 37 |
| 19.5. Fouriertransformierte mit fft..... | 37 |
| 20. Differentialgleichungen | 38 |
| 20.1. Grundbegriffe | 38 |
| 20.2. Separierbare Differentialgleichungen..... | 38 |
| 20.3. Lineare Differentialgleichungen..... | 39 |
| 20.4. Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung | 40 |
| 20.5. Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten | 42 |
| 21. Laplace-Transformation | 45 |
| 21.1. Methode der Laplace-Transformation | 45 |
| 21.2. Linearität der Laplace-Transformation | 45 |
| 21.3. Sätze der Laplace-Transformation..... | 45 |
| 21.4. Laplace-Transformation bei RLC-Netzwerken..... | 46 |
| 21.5. Laplace-Tabelle..... | 47 |
| 22. Partialbruchzerlegung..... | 48 |
| 22.1. Definition | 48 |
| 22.2. Der Nenner $N(x)$ besitzt nur reelle Nullstellen..... | 48 |
| 22.3. Zerlegung mit einfachen Nullstellen | 49 |
| 22.4. Zerlegung mit zweifachen Nullstellen..... | 49 |
| 23. Stochastik | 50 |
| 23.1. Kennzahlen | 50 |
| 23.2. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeit..... | 50 |
| 23.3. Hilfsmittel aus der Kombinatorik..... | 51 |
| 23.4. Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten..... | 52 |
| 23.5. Bedingte Wahrscheinlichkeit | 52 |
| 23.6. Wahrscheinlichkeitsgraph | 53 |
| 23.7. Intaktwahrscheinlichkeit | 53 |
| 23.8. Zufallsvariablen | 55 |
| 23.9. Binominalverteilung..... | 57 |
| 23.10. Normalverteilung (Gaussverteilung)..... | 57 |
| 23.11. Approximation der Binominalverteilung..... | 58 |
| 23.12. Erwartungswert einer Zufallsvariablen | 58 |
| 23.13. MTTF (Mean Time to Failure) | 59 |
| 23.14. Varianz mit Standardabweichung | 60 |
| 23.15. Ungleichung von Tschebyscheff | 61 |
| 23.16. Lebensdauer von Systemen | 61 |
| 23.17. Integrationsmethoden..... | 62 |
| 24. MATLAB | 63 |

1. Endliche und Unendliche Reihen

1.1. Definition einer Reihe

Unter einer endlichen Reihe versteht man die Summe

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad a_1: \text{Anfangsglied} \quad a_n: \text{Endglied}$$

1.2. Arithmetische Reihen

Die Differenz zweier aufeinanderfolgenden Glieder ist konstant: $a_{k+1} - a_k = \text{konst.} = d$
 Die Reihe besitzt den Summenwert

$$a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + [a + (n - 1)d] = n \cdot a + \frac{(n - 1) \cdot n}{2} \cdot d$$

a : Anfangsglied $a_n = a + (n - 1)d$: Endglied
 d : Differenz $a_{k+1} - a_k$ $a_k = a + (k - 1)d$: Bildungsgesetz der arithmetischen Reihe

1.3. Geometrische Reihen

Der Quotient zwei aufeinander folgender Glieder ist konstant: $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \text{konst.} = q$
 Die Reihe besitzt den Summenwert

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \sum_{k=1}^n aq^{k-1} = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (q \neq 1)$$

a : Anfangsglied $a_n = aq^{n-1}$: Endglied
 q : Quotient a_{k+1}/a_k $a_k = aq^{k-1}$: Bildungsgesetz der geometrischen Reihe

Eine unendliche geometrische Reihe hat genau dann eine endliche Summe, wenn $|q| < 1$.

$$S = a \cdot \frac{1}{1 - q}$$

2. Binomische Formeln

2.1. Pascalsches Dreieck

| | | | | | | | | | |
|-------------|---|---|----|----|----|----|----|---|---|
| $(a + b)^0$ | 1 | | | | | | | | |
| $(a + b)^1$ | 1 | 1 | | | | | | | |
| $(a + b)^2$ | 1 | 2 | 1 | | | | | | |
| $(a + b)^3$ | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | |
| $(a + b)^4$ | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | |
| $(a + b)^5$ | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | | |
| $(a + b)^6$ | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | | |
| $(a + b)^7$ | 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 | |
| $(a + b)^8$ | 1 | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 |

$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

2.2. Berechnung

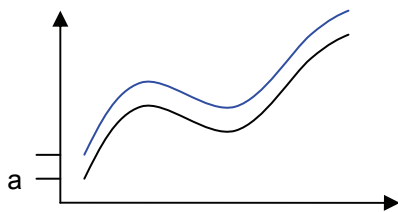
$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$$

Beispiel:

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \binom{10}{2} \cdot \frac{8}{3} = 45 \cdot \frac{8}{3} = 120$$

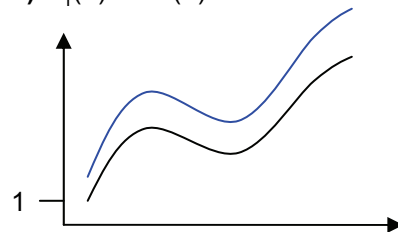
3. Schieben, Strecken, Spiegeln von Funktionen

a) $f_1(x) = f(x) + a$



Schiebe den Graph von f um a in y -Richtung

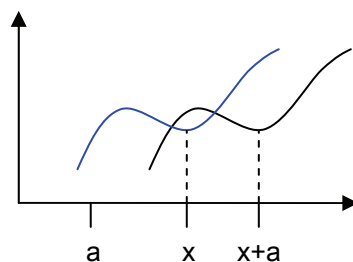
b) $f_1(x) = a \cdot f(x)$



Strecke den Graph von f von der x -Achse aus in y -Richtung mit dem Faktor a (affine Streckung).

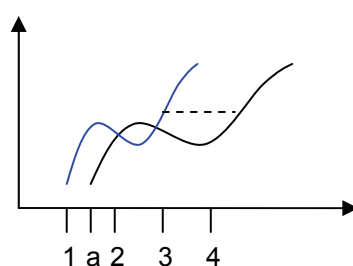
$a = -1$: Spiegelung an der x -Achse.
 $a < 0$: Kombination von Spiegelung und Streckung.

c) $f_1(x) = f(x+a)$



Schiebe den Graphen von f um $-a$ in x -Richtung.

d) $f_1(x) = f(a \cdot x)$



Strecke Graph von f von y -Achse in x -Richtung mit Faktor $\frac{1}{a}$.

$a = -1$: Spiegelung an der y -Achse.
 $a < 0$: Kombination von Spiegelung und Streckung.

4. Symmetrien von Funktionen

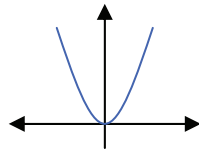
4.1. Gerade Funktionen

Eine Funktion heisst gerade, wenn $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D_f$.

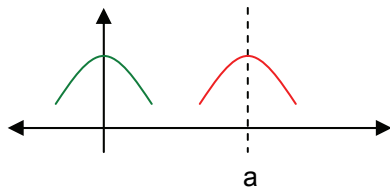
→ Graph von f spiegelsymmetrisch zur y -Achse.

Beispiel:

$$f(x) = x^2$$



Wann ist der Graph von f symmetrisch bezüglich der senkrechten durch $x = a$?



$$f(a-x) = f(a+x)$$

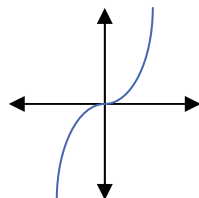
4.2. Ungerade Funktionen

Eine Funktion f heisst ungerade, wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D_f$.

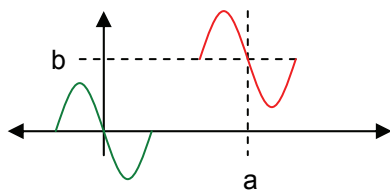
→ Graph von f punktspiegelsymmetrisch bezüglich Nullpunkt.

Beispiel:

$$f(x) = x^3$$



Wann ist der Graph von f punktspiegelsymmetrisch bezüglich (a,b) ?



$$f(a-x) = 2b - f(a+x)$$

5. Polynome

5.1. Definition

Ein Polynom ist eine Funktion der Form

$$P(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n \quad n: \text{Grad des Polynoms } n \in \mathbb{N}$$

a_0, a_1, \dots, a_n : Reelle Polynomkoeffizienten
 Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$

5.2. Faktorisiertungssatz

Eine Zahl c ist genau dann Nullstelle des Polynoms P , wenn P eine Darstellung als Produkt

$$P(x) = (x - c) \cdot Q(x)$$

hat, wobei Q wieder ein Polynom ist.

Beispiel:

$$\begin{array}{r} (2x^3 - 5x^2 + x + 2) : (x - 2) = 2x^2 - x - 1 \\ - (2x^3 - x^2) \\ \hline - x^2 + x + 2 \\ - (-x^2 + 2x) \\ \hline - x + 2 \\ - (-x + 2) \\ \hline 0 \end{array}$$

Folgerung:

Nullstellen von Q sind auch Nullstellen von P . $P(x)$ kann auch geschrieben werden als Produkt:

$$P(x) = (x - c_1)^{n_1} \cdot (x - c_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (x - c_r)^{n_r} \cdot S(x)$$

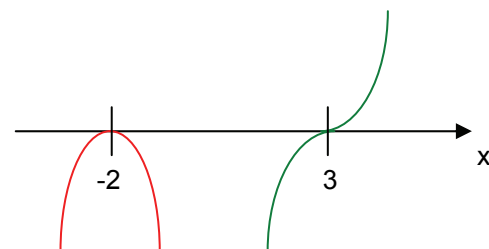
- S: Polynom ohne Nullstelle
- c_1, \dots, c_r : Die Nullstellen von P (ohne Mehrfachnennung)
- n_1, \dots, n_r : Ihre "Vielfachheiten"

Beispiel:

$$f(x) = (x + 2)^2 \cdot (x - 3)^5 \cdot (2x^2 + 1)$$

$\underbrace{\hspace{2em}} \quad \underbrace{\hspace{2em}} \quad \underbrace{\hspace{2em}}$
 NS = -2 NS = 3 S(x)

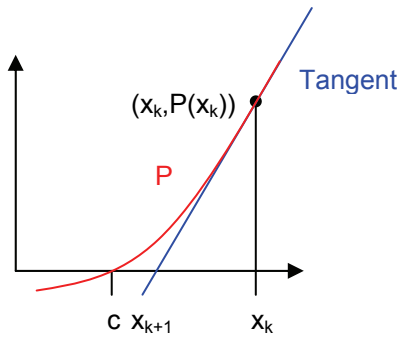
- NS = -2 Vielfachheit 2 In der Nähe von -2: $x \approx -2 \Rightarrow f(x) \approx (x + 2)^2 \cdot (-5)^5 \cdot 9$
- NS = 3 Vielfachheit 5 In der Nähe von 3: $x \approx 3 \Rightarrow f(x) \approx 5^2 \cdot (x - 3)^5 \cdot 19$



5.3. Newton-Verfahren

Hat man einen Schätzwert einer Nullstelle c von P kann mit Hilfe des Newton-Verfahrens eine Folge von immer besseren Näherungswerten, x_0, x_1, x_2, \dots berechnet werden:

Wenn x_k schon berechnet: Lege Tangente an den Graph P im Punkt $(x_k, P(x_k))$ und schneide diese mit der x -Achse $\rightarrow x_{k+1}$



$P'(x_k)$ sei die Steigung der Tangente:

$$P'(x_k) = \frac{P(x_k) - P(x_{k+1})}{x_k - x_{k+1}}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{P(x_k)}{P'(x_k)}$$

Regel zur Bildung von $P'(x_k)$:

Jeder Summand wird mit seinem Exponenten, der anschliessend um 1 verkleinert wird, multipliziert.

Beispiel:

$$P(x) = 3x^5 - 7x^3 + 4x^2 - 2x + 5$$

$$P'(x) = 15x^4 - 21x^2 + 8x - 2$$

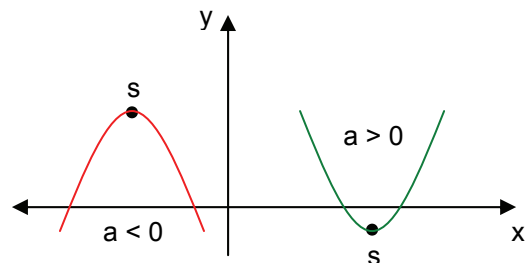
6. Quadratische Funktionen (Parabeln)

6.1. Hauptform einer Parabel

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

Scheitelpunkt: $S = \left(-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a} \right)$

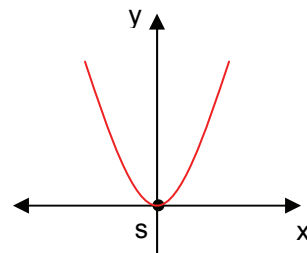
$a > 0$: Öffnung nach oben
 $a < 0$: Öffnung nach unten



Spezialfall:

$a = 1; b = c = 0$

Normalparabel $y = x^2$

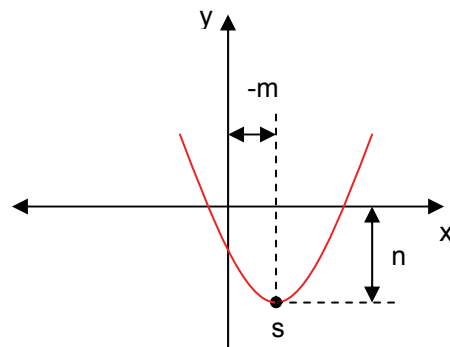


6.2. Verschobene Normalparabel

$$y = (x+m)^2 + n$$

$S(-m;n)$

m, n : Koordinaten des Scheitelpunktes



6.3. Produktform einer Parabel

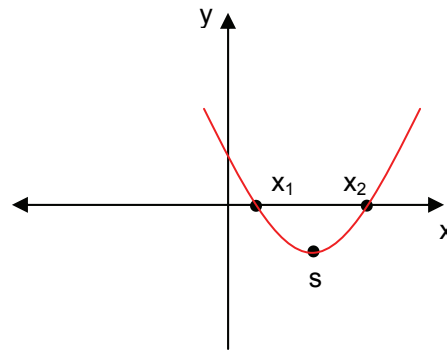
$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

x_1, x_2 : Nullstellen
 $x - x_1$: Linearfaktor
 $x - x_2$: Linearfaktor

Sonderfall:

$$x_1 = x_2 \rightarrow y = a(x - x_1)^2$$

Die Parabel berührt die x-Achse im Scheitelpunkt $S = (x_1, 0)$ (doppelte Nullstelle).



7. Quadratische Gleichungen

7.1. Grundform

$$ax^2 + bx + c = 0$$

7.2. Lösungsformel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

7.3. Diskriminante

$$D = b^2 - 4ac$$

$D = 0$ 1 reelle Lösung
 $D > 0$ 2 reelle Lösungen
 $D < 0$ keine reellen Lösungen

8. Differentialrechnung

8.1. Definition

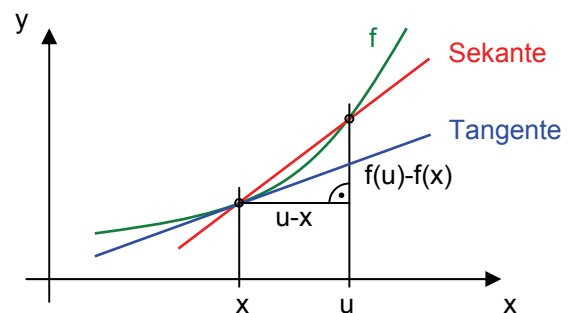
Differenzenquotient (Sekantensteigung):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u) - f(x)}{u - x}$$

Differentialquotient:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

= Tangentensteigung im Punkt $(x; f(x))$
 = Ableitung von f an der Stelle x



8.2. Ableitung elementarer Funktionen

| Funktion $f(x)$ | | Ableitung $f'(x)$ |
|-----------------------------|---------------------|-----------------------------------------|
| Potenzfunktionen | x^n | $n \cdot x^{n-1}$ |
| Trigonometrische Funktionen | $\sin(x)$ | $\cos(x)$ |
| | $\cos(x)$ | $-\sin(x)$ |
| | $\tan(x)$ | $\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$ |
| | $\cot(x)$ | $-\frac{1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x)$ |
| Arkusfunktionen | $\arcsin(x)$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| | $\arccos(x)$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| | $\arctan(x)$ | $\frac{1}{1+x^2}$ |
| | $\text{arc cot}(x)$ | $-\frac{1}{1+x^2}$ |
| Exponentialfunktionen | e^x | e^x |
| | a^x | $\ln(a) \cdot a^x$ |
| Logarithmusfunktionen | $\ln(x)$ | $\frac{1}{x}$ |
| | $\log_a(x)$ | $\frac{1}{\ln(a) \cdot x}$ |

8.3. Faktorregel

Ein konstanter Faktor C bleibt beim Differenzieren erhalten:

$$f(x) = C \cdot g(x) \rightarrow f'(x) = C \cdot g'(x)$$

8.4. Summenregel

Eine endliche Summe von Funktionen darf summandenweise abgeleitet werden:

$$f(x) = g_1(x) + g_2(x) + \dots + g_n(x) \rightarrow f'(x) = g_1'(x) + g_2'(x) + \dots + g_n'(x)$$

8.5. Kettenregel

f ist Verkettung von der äusseren Funktion g mit der inneren Funktion h :

$$f(x) = g(h(x))$$

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

8.6. Produktregel

Bei zwei Faktorfunktionen:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Bei drei Faktorfunktionen:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \cdot w(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) \cdot w(x) + u(x) \cdot v'(x) \cdot w(x) + u(x) \cdot v(x) \cdot w'(x)$$

8.7. Quotientenregel

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$

8.8. Ableitung der Umkehrfunktion

Wenn die Ableitung f' von f und die Umkehrfunktion g von f bekannt sind, kann g' berechnet werden:

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

9. Integralrechnung

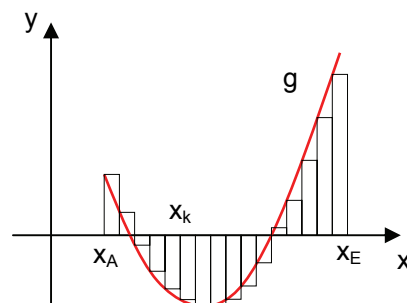
9.1. Definition

$$x_k = x_A + k \cdot \Delta x$$

Riemann-Summe von g :

$$\sum_{k=0}^{n-1} g(x_k) \cdot \Delta x \quad \Delta x = \frac{|x_E - x_A|}{n}$$

= Summe der Rechteckflächen
(Rechtecke unterhalb der x-Achse werden negativ gezählt)



Integral von g , von x_A bis x_E :

$$\int_{x_A}^{x_E} g(x) dx = \text{Flächeninhalt zwischen x-Achse und Graph von } g, \text{ von } x_A \text{ bis } x_E.$$

9.2. Berechnung eines bestimmten Integrals

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad F(x) \text{ ist Stammfunktion von } f(x) \quad (F'(x) = f(x))$$

9.3. Elementare Integrationsregeln für bestimmte Integrale

Regel 1: Faktorregel:

Ein konstanter Faktor C darf vor das Integral gezogen werden:

$$\int_a^b C \cdot f(x) \, dx = C \cdot \int_a^b f(x) \, dx$$

Regel 2: Summenregel:

Eine endliche Summe von Funktionen darf summandenweise integriert werden:

$$\int_a^b (f_1(x) + \dots + f_n(x)) \, dx = \int_a^b f_1(x) \, dx + \dots + \int_a^b f_n(x) \, dx$$

Regel 3: Vertauschregel:

Vertauschen der Integrationsgrenzen bewirkt einen Vorzeichenwechsel des Integrals:

$$\int_b^a f(x) \, dx = - \int_a^b f(x) \, dx$$

Regel 4:

Fallen die Integrationsgrenzen zusammen ($a = b$), so ist der Integralwert gleich Null.

$$\int_a^a f(x) \, dx = 0$$

Regel 5:

Für jede Stelle c aus dem Integrationsintervall gilt:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx \quad (a \leq c \leq b)$$

10. Integrationsmethoden

10.1. Partielle Integration

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^{-3x}}_{v'} dx &= x \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot e^{-3x} \right) - \int -\frac{1}{3} \cdot e^{-3x} dx \\ \downarrow \quad \uparrow &= -\frac{x}{3} \cdot e^{-3x} - \frac{1}{9} \cdot e^{-3x} + C \\ u' = 1 \quad v &= -\frac{1}{3} e^{-3x} \\ &= \underline{\underline{-\frac{1}{9} \cdot (3x+1) \cdot e^{-3x} + C}} \end{aligned}$$

10.2. Kettenregel als Integrationsregel

Integration durch Substitution:

$$\left(\int f(u) \, du \right)_{u=g(x)} = \int f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^3}{(1+x^4)^5} dx &= \left(\int \frac{1}{u^5} du \right)_{u=1+x^4} & u = g(x) = 1+x^4 \\ & & g'(x) = 4x^3 \\ &= \left(-\frac{1}{4} u^{-4} + C \right)_{u=1+x^4} \\ &= \underline{\underline{-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1+x^4)^4} + C}} \end{aligned}$$

In Leibnitz-Schreibweise:

$$\int f(u) \, du = \int f(u) \cdot \frac{du}{dx} dx$$

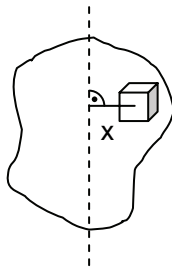
Beispiel:

$$\begin{aligned} \int 2x \cdot e^{-x^2} dx &= \int e^{-u} \cdot \frac{du}{dx} dx & u = x^2 \\ & & \frac{du}{dx} = 2x \\ &= \int e^{-u} du \\ &= -e^{-u} + C \\ &= \underline{\underline{-e^{-x^2} + C}} \end{aligned}$$

11. Trägheitsmoment

11.1. Definition

Trägheitsmoment eines Körpers bezüglich einer Achse:



Der Körper wird in kleine Stücke mit Masse ΔM aufgeteilt. Falls der Körper mit Winkelgeschwindigkeit ω um die Achse rotiert, ist die kinetische Energie von

$$\Delta M: \quad \Delta E = \frac{1}{2} \cdot \Delta M \cdot (\omega \cdot x)^2$$

Gesamte kinetische Energie:

$$E = \sum_{\text{alle } \Delta M} \frac{1}{2} \cdot \Delta M \cdot \omega^2 \cdot x^2 \quad E = \frac{1}{2} \left(\sum_{\text{alle } \Delta M} x^2 \cdot \Delta M \right) \cdot \omega^2 \quad E = \frac{1}{2} \cdot \Theta \cdot \omega^2$$

Trägheitsmoment: $\Theta = \sum_{\text{alle } \Delta M} x^2 \cdot \Delta M$

Spezialfall: Körper homogen

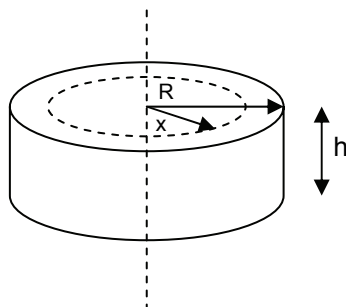
$$\Delta M = \rho \cdot \Delta V \quad \rho = \text{Dichte} = \text{konst.}$$

$$\Delta V = F(x) \cdot \Delta x$$

Trägheitsmoment: $\Theta = \rho \cdot \int_0^b x^2 \cdot F(x) \, dx$

- x = Abstand zur Drehachse
- b = Maximaler Abstand x
- $F(x)$ = Grundflächenfunktion des Volumenelements ΔV

11.2. Beispiel: Flacher Zylinder



$$F(x) = 2\pi \cdot x \cdot h$$

$$\rho = \frac{M}{\pi \cdot R^2 \cdot h}$$

$$\Theta = \rho \int_0^b x^2 \cdot F(x) \, dx = \frac{M}{\pi \cdot R^2 \cdot h} \int_0^R x^2 \cdot 2\pi \cdot x \cdot h \, dx$$

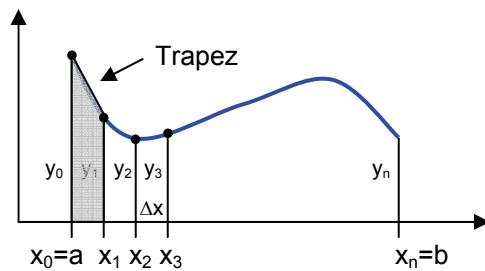
$$\Theta = \frac{M}{R^2} \int_0^R 2x^3 \, dx = 2 \cdot \frac{M}{R^2} \int_0^R x^3 \, dx$$

$$\Theta = 2 \cdot \frac{M}{R^2} \left(\frac{x^4}{4} \Big|_0^R \right) = 2 \cdot \frac{M}{R^2} \cdot \frac{R^4}{4} = \underline{\underline{\frac{M \cdot R^2}{2}}}$$

12. Numerische Integration

12.1. Trapezformel

Die Fläche unter der Kurve f wird zunächst in n Streifen gleicher Breite Δx zerlegt, dann wird in jedem Streifen die krummlinige Begrenzung durch die Sekante ersetzt. Der Ersatzstreifen besitzt die Form eines Trapezes.



$$T = \int_a^b f(x) \, dx = \Delta x \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + (y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) \right)$$

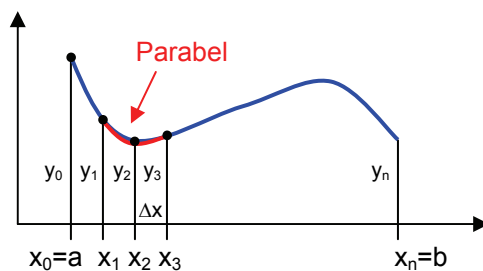
Breite eines einfachen Streifens: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

Stützstellen: $x_k = a + k \cdot \Delta x$

Stützwerte: $y_k = f(x_k)$ } $k = 0, 1, \dots, n$

12.2. Simpson Formel

Die Fläche der Kurve f wird in $2n$, d.h. in eine gerade Anzahl einfacher Streifen gleicher Breite h zerlegt. In jedem Doppelstreifen (der aus zwei aufeinander folgenden einfachen Streifen besteht) ersetzt man die krummlinige Begrenzung durch eine Parabel.



$$S = \int_a^b f(x) \, dx = \frac{\Delta x}{3} \cdot ((y_0 + y_n) + 2 \cdot (y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + 4 \cdot (y_1 + y_3 + y_5 + \dots + y_{n-1})) \quad n = \text{gerade}$$

Breite eines einfachen Streifens: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

Stützstellen: $x_k = a + k \cdot \Delta x$

Stützwerte: $y_k = f(x_k)$ } $k = 0, 1, \dots, n$

13. Lokale Approximation

13.1. Taylorpolynome

Definition:

Die Funktion f wird in der Umgebung der Stelle x_0 durch ein Polynom vom Grad n approximiert.

Das gesuchte Polynom ist also:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad T_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

$$T(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}_{\text{Taylor-Polynom von Grad } n} + \underbrace{R_n(x)}_{\text{Restglied (Lagrange)}}$$

Restglied von Lagrange:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad (\xi \text{ liegt zwischen } x \text{ und } x_0)$$

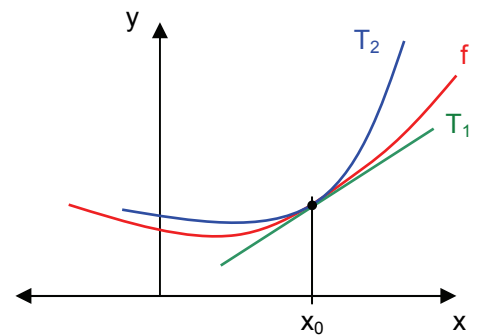
13.2. Lineare und Quadratische Näherung:

Definition:

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} (x - x_0)^2$$

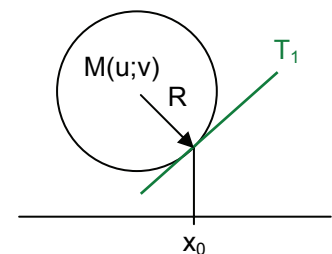
- $T_1(x)$ → Lineare Näherung: Tangente im Punkt $(x_0; f(x_0))$
- $T_2(x)$ → Quadratische Näherung: Parabel durch Punkt $(x_0; f(x_0))$ mit gleicher **Tangente** wie f und gleichem **Krümmungsradius** wie f .



Krümmungsradius:

Krümmungsradius des Graphen f bei x_0 :

$$R = \frac{(1 + f'(x_0)^2)^{\frac{3}{2}}}{|f''(x_0)|} \quad \text{Falls } f'(x_0) = 0: \quad R = \frac{1}{|f''(x_0)|}$$



13.3. Taylorreihe

Definition:

Die Taylorreihe von f mit Zentrum x_0 ist eine unendliche Reihe. Falls ein Grenzwert existiert, sagt man die Reihe sei konvergent.

$$T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

$$T(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots$$

Voraussetzung: $f(x)$ ist in der Umgebung von x_0 beliebig oft differenzierbar und das Restglied $R_n(x)$ in der Taylorformel verschwindet für $n \rightarrow \infty$.

Konvergenzradius:

Der Konvergenzradius gibt den Bereich um das Zentrum x_0 an, in dem die Reihe konvergiert, also einen Grenzwert hat.

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$


Beispiel:

$$f(x) = \sin^2(x) \quad \rightarrow \quad T(x) = \frac{2}{2!} x^2 - \frac{2^3}{4!} x^4 + \frac{2^5}{6!} x^6 - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{2^{2k+1}}{(2k+2)!} \cdot x^{2k+2}$$

$$|a_k| = \frac{2^{2k+1}}{(2k+2)!} \quad |a_{k+1}| = \frac{2^{2k+2}}{(2k+2)! \cdot (2k+3)}$$

In dieser Taylorreihe fehlen die Summanden mit den ungeraden Potenzen von x (x^1, x^3, x^5, \dots). Deshalb wird der Konvergenzradius quadratisch:

$$R^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \frac{2^{2k+1}}{(2k+2)!} \cdot \frac{(2k+2)! \cdot (2k+3)}{2^{2k+2}} = \frac{2k+3}{2} = \infty \quad \rightarrow \quad R = \underline{\underline{\infty}}$$

Wichtige Taylorreihen:

| Funktion | Potenzreihenentwicklung | Konvergenzbereich |
|---------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Exponentialfunktionen | | |
| e^x | $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$ | $ x < \infty$ |
| e^{-x} | $1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$ | $ x < \infty$ |
| a^x | $1 + \frac{\ln(a)}{1!} x + \frac{\ln(a)^2}{2!} x^2 + \frac{\ln(a)^3}{3!} x^3 + \frac{\ln(a)^4}{4!} x^4 + \dots$ | $ x < \infty$ |
| Logarithmische Funktionen | | |
| $\ln(x)$ | $(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \dots$ | $0 < x \leq 2$ |
| Trigonometrische Funktion | | |
| $\sin(x)$ | $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$ | $ x < \infty$ |
| $\cos(x)$ | $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$ | $ x < \infty$ |
| $\tan(x)$ | $x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + \frac{62}{2835} x^9 + \dots$ | $ x < \frac{\pi}{2}$ |

13.4. Binomische Reihe

Definition:

Dies ist die Taylorreihe von $f(x) = (1 + x)^p$, $x_0 = 0$ ($p =$ natürliche Zahl):

$$T(x) = (1 + x)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \cdot x^k$$

Die Summe ist endlich und gilt für alle x . Das heisst der Konvergenzradius R ist unendlich.

Beispiel:

Gesucht $T_5(x)$ für $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$:

$$\begin{aligned} \binom{\frac{1}{2}}{0} &= 1 & \binom{\frac{1}{2}}{1} &= \frac{1}{2} & \binom{\frac{1}{2}}{2} &= \frac{\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2})}{1 \cdot 2} = -\frac{1}{8} & \binom{\frac{1}{2}}{3} &= -\frac{1}{8} \cdot \frac{-\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{16} \\ \binom{\frac{1}{2}}{4} &= \frac{1}{16} \cdot \frac{-5}{4} = -\frac{5}{128} & \binom{\frac{1}{2}}{5} &= -\frac{5}{128} \cdot \frac{-\frac{7}{2}}{5} = \frac{7}{256} \end{aligned}$$

$$T_5(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5$$

13.5. Berechnung von Grenzwerten

Definition:

Wobei k die kleinste natürliche Zahl ist, so dass $g^{(k)}(x_0) \neq 0$ und $f^{(k)}(x_0) \neq 0$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{g^{(k)}(x_0)} \quad \text{Regel von de l'Hôpital:} \quad \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \pm\infty \quad \text{falls} \quad \begin{matrix} g^{(k)}(x_0) = 0 \\ f^{(k)}(x_0) \neq 0 \end{matrix}$$

14. Mehrdimensionale Analysis

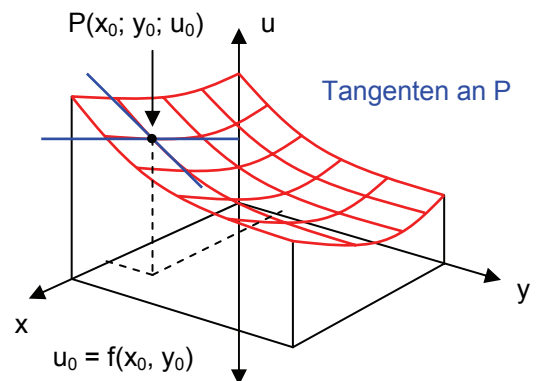
14.1. Totales Differential

Definition:

Wenn der Graph f bei $(x_0; y_0; u_0)$ eine Tangentialebene hat, dann ist diese durch

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

bestimmt. Die Tangentialebene kann als Näherung vom Graph f in der Umgebung des Punktes $(x_0; y_0; u_0)$ betrachtet werden.



Die lineare Funktion $T_1(x,y)$ kann als Näherung von $f(x,y)$ verwendet werden, wenn (x,y) in der Nähe von (x_0,y_0) (Taylorpolynom vom Grad 1 mit zwei Variablen).

$$T_1(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \cdot (y - y_0) + u_0$$

Koordinatengleichung:

$$z = f(x,y) = ax + by + c$$

Wenn diese Ebene der Tangentialebene von f entspricht:

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \quad b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \quad c = u_0 - ax_0 - by_0$$

$$z = ax + by + c$$

$$z = ax + by + u_0 - ax_0 - by_0$$

$$z = \underline{a(x - x_0) + b(y - y_0) + u_0}$$

Verallgemeinerung auf n Variablen:

$u = f(x_1, \dots, x_n)$: Lineare Näherung in der Umgebung von (x_{10}, \dots, x_{n0}) .

$$T_1(x_1, \dots, x_n) = f(x_{10}, \dots, x_{n0}) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot (x_k - x_{k0})$$

14.2. Fehlerfortpflanzung

Absoluter Fehler:

Gegeben sind Messwerte x_1, \dots, x_n von verschiedenen Größen. Daraus wird eine Größe $u = f(x_1, \dots, x_n)$ berechnet. Angenommen, wir kennen die oberen Schranken für die Fehler der Messwerte x_i :

$$|x_i - x_{i0}| \leq \Delta x_i \quad x_{i0} = \text{wahrer Wert, unbekannt}$$

Man schreibt dafür auch $x_{i0} = x_i \pm \Delta x_i$

Totales Differential:

$$u - u_0 \approx \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) \cdot (x_i - x_{i0}) = \Delta u \approx \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) \cdot \Delta x_i$$

$$\Delta u \approx \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) \right| \cdot \Delta x_i$$

Δx_i = obere Schranke für Betrag des Fehlers von x_i

Δu = obere Schranke für Betrag des Fehlers von u

Relative Fehler bei Potenzfunktionen:

Der maximale relative Fehler von u ist die Summe der maximalen relativen Fehler aller x_k , wobei jeder Summand mit dem Betrag der entsprechenden Exponenten zu gewichten ist.

$$u = f(x_1, \dots, x_n) = a \cdot x_1^{r_1} \cdot x_2^{r_2} \cdot \dots \cdot x_n^{r_n} \quad (a = \text{konst.})$$

$$\frac{\Delta u}{|u|} \approx \sum_{k=1}^n |r_k| \cdot \frac{\Delta x_k}{|x_k|}$$

14.3. Extremwertprobleme

Definition:

Funktion von zwei Variablen $z = f(x,y)$

f hat ein **lokales Maximum** bei (x_0, y_0) , wenn $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ für (x, y) in der Umgebung von (x_0, y_0) .
 f hat ein **globales Maximum** bei (x_0, y_0) , wenn $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ für alle $(x, y) \in D_f$.

Kandidaten für Extrempunkte:

- (x_0, y_0) wo Tangentialebene horizontal, d.h.
 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$
- Punkte auf dem Rand des Definitionsbereichs D_f .
- Punkte wo f keine Tangentialebene hat.

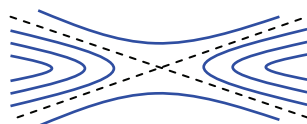
Bei horizontaler Tangentialebene kann die Fläche dort auch einen Sattel- oder Terrassenpunkt haben.

Höhenkurven:

Auf der Höhe H : $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F - H = 0$

→ Höhenkurve ist ein Kegelschnitt

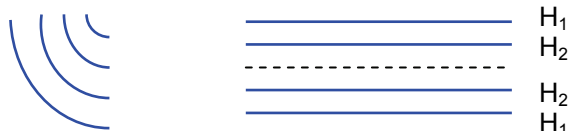
a) $B^2 - 4AC > 0$ Hyperbel → **Sattelpunkt**



b) $B^2 - 4AC < 0$ Ellipsen → **Maximal- oder Minimalpunkt**



c) $B^2 - 4AC = 0$ Parabeln oder zwei parallele Geraden → **fallendes oder horizontales Tal**



15. Vektorfelder

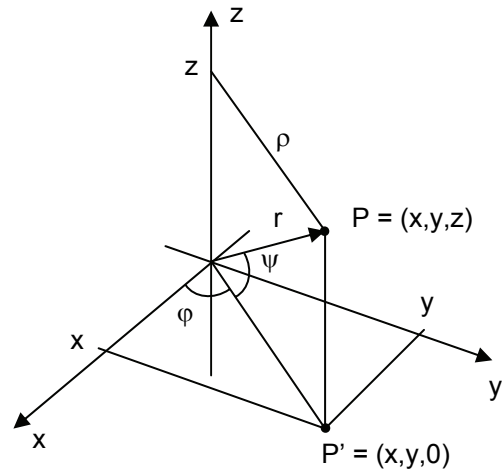
15.1. Definition

Ein Vektorfeld ist eine Funktion $P \rightarrow \vec{r}(P)$ die jedem Punkt P ihres Definitionsbereichs einen Vektor zuordnet. Mathematisch haben wir eine Funktion:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\vec{r} = \overrightarrow{OP}} \equiv \underbrace{(x, y, z)}_P \rightarrow \vec{a}(x, y, z) = \begin{pmatrix} a_1(x, y, z) \\ a_2(x, y, z) \\ a_3(x, y, z) \end{pmatrix}$$

Bezeichnungen:

- x, y, z Koordinaten (kartesisch) von P
- $r = |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- $\rho = \text{Abstand von } P \text{ zur } z\text{-Achse} = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\varphi = \text{Polarwinkel von } P' \text{ in der } xy\text{-Ebene}$
- $\psi = \text{Breitenwinkel} = \arctan\left(\frac{z}{\rho}\right)$



15.2. Niveau-Mengen

$u(x_1, \dots, x_n)$ Funktion von n Variablen, $c \in \mathbb{R}$

Die Niveau Menge von u zum Niveau c ist die Menge aller Punkte $(x_1, \dots, x_n) \in D_u$ wo $u(x_1, \dots, x_n) = c$, d.h. die Lösungsmenge der Gleichung $u(x_1, \dots, x_n) = c$.

$n = 2$: Niveau-Mengen sind normalerweise Kurven (nämlich die Höhenkurven des Graphen von u).

$n = 3$: Niveau-Mengen sind normalerweise Flächen.

15.3. Gradient einer Funktion $P \rightarrow u(P)$

- Der Gradient einer Funktion $P \rightarrow u(P)$ zeigt in die Richtung, in der man vom Punkt P aus gehen muss, um einen möglichst grossen Zuwachs Δu zu erhalten.
- Ausserdem steht der Gradient senkrecht auf die Niveau-Menge durch den Punkt P , d.h. der Niveau-Menge zum Niveau $c = u(P)$.

Gradient:
$$\vec{\nabla} u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(P_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(P_0) \\ \frac{\partial u}{\partial z}(P_0) \end{pmatrix}$$

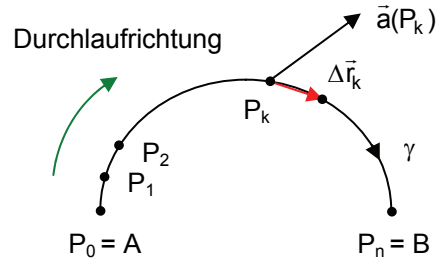
$P \rightarrow \vec{\nabla} u(P)$ ist ein Vektorfeld, dessen Feldlinien die Niveau-mengen von u überall rechtwinklig schneiden, d.h. sie sind Orthogonaltrajektorien der Niveau-Mengen.

15.4. Linienintegrale

Beliebiges Vektorfeld $\vec{a}(P)$, Kurve γ im Definitionsbereich von \vec{a} , mit Durchlaufsinn:

Linienintegral von \vec{a} über γ :

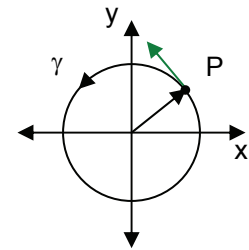
$$\int_{\gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \lim_{\substack{|\Delta\vec{r}_i| \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sum_{i=0}^{n-1} \vec{a}(P_i) \cdot \Delta\vec{r}_i$$



Beispiel:

$$\vec{a}(P) = \frac{1}{\rho} \vec{e}_{\varphi}(P) = \frac{1}{\rho^2} \cdot \vec{\rho} = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

γ = Kreis um 0, Radius R, einmal in Gegenuhrzeigerichtung.



$$\vec{r} = R \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \quad t \text{ von } 0 \text{ bis } 2\pi \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = R \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}(P(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{R^2 \cos^2(t) + R^2 \sin^2(t)} \cdot \begin{pmatrix} -R \sin(t) \\ R \cos(t) \end{pmatrix} \cdot R \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} = 1$$

also

$$\int_{\gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} 1 \, dt = \underline{\underline{2\pi}}$$

15.5. Flächenintegrale

Der Fluss eines Vektorfeldes \vec{a} durch eine Fläche F wird durch das Flächenintegral beschrieben.

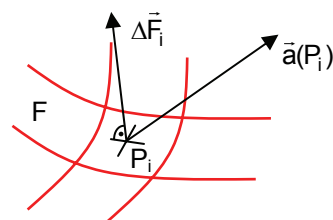
$$\iint_F \vec{a} \, d\vec{F} = \lim_{\text{alle } \Delta F_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \vec{a}(P_i) \cdot \Delta\vec{F}_i$$

\vec{a} : Vektorfeld

F: Orientierte Fläche im Definitionsbereich von \vec{a} (d.h. für jeden Punkt P auf F ist $\vec{a}(P)$ definiert)

F wird in kleine Stücke ΔF_i aufgeteilt, die ungefähr eben sind, und auf denen \vec{a} ungefähr konstant ist.

$\Delta\vec{F}_i$ = Flächenvektor ΔF_i
(senkrecht auf die Fläche in positiver Richtung bezüglich Orientierung,
Länge = Flächeninhalt von ΔF_i)

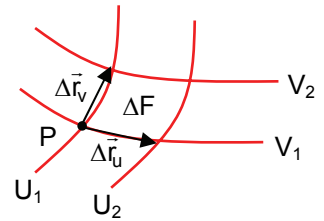


Allgemeine Formel:

Wenn F durch Parametrdarstellung gegeben: $\vec{r} = \vec{OP} = r(u, v)$

$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(P)$: Tangentenvektor an v-Linie durch P (v konst.)

$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(P)$: Tangentenvektor an u-Linie durch P (u konst.)



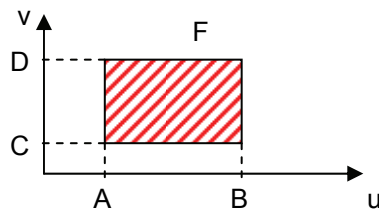
$$\Delta \vec{r}_u \approx \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \Delta u \quad \Delta \vec{r}_v \approx \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \cdot \Delta v$$

$$\Delta \vec{F} \approx \pm \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) \cdot \Delta u \cdot \Delta v$$

Je nach Orientierung

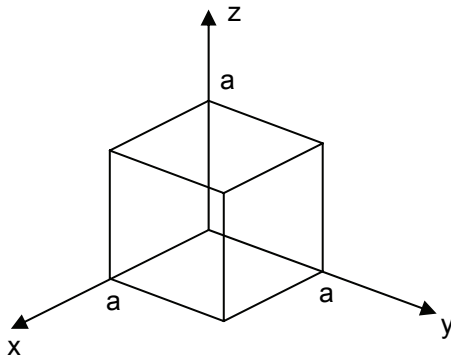
$$\iint_F \vec{a} \cdot d\vec{F} = \lim \sum \vec{a}(P) \cdot \Delta \vec{F} = \pm \iint_F \vec{a}(P(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) du dv$$

Falls:



$$\iint_F \vec{a} \cdot d\vec{F} = \pm \int_C^D \int_A^B \vec{a} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) du dv$$

Beispiel:



$$\vec{a}(P) = \begin{pmatrix} xz \\ yz - x^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

F = gesamte, nach aussen orientierte Oberfläche des Würfels.

$$\left. \begin{array}{l} \iint_{\text{Boden}} \vec{a} \cdot d\vec{F} = 0 \\ \iint_{\text{Deckel}} \vec{a} \cdot d\vec{F} = 0 \end{array} \right\} \text{weil } \vec{a} \text{ tangential (horizontal)}$$

$$\iint_F \vec{a} \cdot d\vec{F} = \iint_{\text{Boden}} \vec{a} \cdot d\vec{F} + \iint_{\text{Deckel}} \vec{a} \cdot d\vec{F} + \iint_{\text{Linke Seite}} \vec{a} \cdot d\vec{F} + \iint_{\text{Rechte Seite}} \vec{a} \cdot d\vec{F} + \dots$$

Linke Seite (in xz-Ebene):

y = 0; x, z Parameter

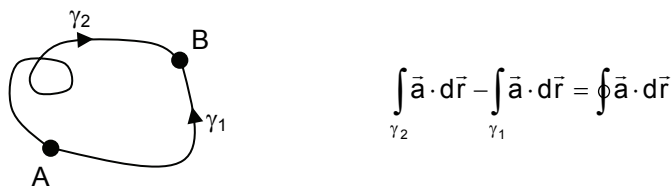
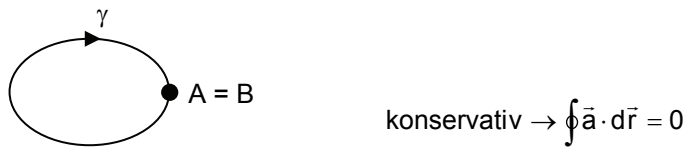
$$\Delta \vec{F} = \Delta x \cdot \Delta z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\Delta x \cdot \Delta z \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{a} \cdot \Delta \vec{F} = \begin{pmatrix} xz \\ yz - x^2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \Delta x \cdot \Delta z = (x^2 - yz) \cdot \Delta x \cdot \Delta z \quad y = 0 \rightarrow \vec{a} \cdot \Delta \vec{F} = x^2 \cdot \Delta x \cdot \Delta z$$

$$\iint_{\text{Linke Seite}} \vec{a} \cdot d\vec{F} = \int_{z=0}^a \int_{x=0}^a x^2 dx dz = \frac{a^3}{3} \cdot a = \underline{\underline{\frac{a^4}{3}}}$$

15.6. Potentiale von Linienintegralen

Ein Vektorfeld \vec{a} heisst konservativ, wenn alle seine Kurvenintegrale wegunabhängig sind (Gleichbedeutend wie alle Integrale über einen geschlossenen Weg geben 0). Ist dies der Fall kann für ein Linienintegral eine Stammfunktion, oder auch Potential genannt, gefunden werden.



Neben Gradientenfelder sind nicht alle Vektorfelder konservativ. Die so genannten Integrabilitätsbedingungen geben Aufschluss darüber, ob ein Vektorfeld ein Potential hat oder nicht. Ist eine der drei Bedingungen nicht erfüllt so ist das Vektorfeld nicht konservativ und besitzt auch kein Potential:

$$\vec{a}(P) = \begin{pmatrix} a_1(P) \\ a_2(P) \\ a_3(P) \end{pmatrix} \quad \text{Integrabilitätsbedingungen: } \boxed{\frac{\partial a_1}{\partial y} = \frac{\partial a_2}{\partial x}; \quad \frac{\partial a_2}{\partial z} = \frac{\partial a_3}{\partial y}; \quad \frac{\partial a_3}{\partial x} = \frac{\partial a_1}{\partial z}}$$

Mit Hilfe der partiellen Integration kann die Stammfunktion für ein Vektorfeld gefunden werden. Allerdings kann die Stammfunktion einen eingeschränkten Definitionsbereich haben. Das heisst das Vektorfeld ist eventuell nur in diesem eingeschränkten Gebiet konservativ.

Beispiel:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2x^2 + 5xy + yz \\ \frac{5}{2}x^2 + xz - 2y^2 \\ xy \end{pmatrix} \quad \text{Gesucht } u(P) = u(x,y,z) \text{ so dass}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x^2 + 5xy + yz \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{5}{2}x^2 + xz - 2y^2 \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xy$$

$$a_1 \xrightarrow{\int} u = \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2y + xyz + h(y,z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{5}{2}x^2 + xz + \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{5}{2}x^2 + xz - 2y^2$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = -2y^2 \xrightarrow{\int} h(x,y) = -\frac{2}{3}y^3 + h(z)$$

$$u = \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2y + xyz - \frac{2}{3}y^3 + h(z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = xy + \frac{\partial h}{\partial z} = xy$$

$$\frac{\partial h}{\partial z} = 0 \xrightarrow{\int} h(z) = C$$

$$u = \underline{\underline{\frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2y + xyz - \frac{2}{3}y^3 + C}}$$

15.7. Satz von Stokes

Für ein beliebiges Vektorfeld \vec{a} definiert man die Rotation von \vec{a} durch:

$$\vec{\nabla} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \\ \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{formales Vektorprodukt} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

Wenn F eine orientierte Fläche ist im Definitionsbereich von \vec{a} mit Randkurve γ so orientiert, dass sich zusammen mit der Orientierung von F eine Rechtsschraube ergibt, dann gilt:

$$\iint_F (\vec{\nabla} \times \vec{a}) \cdot d\vec{F} = \oint_{\gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r}$$

15.8. Satz von Gauss

Das skalare Feld $\vec{\nabla} \cdot \vec{a}$ heisst Divergenz von \vec{a} oder Quelledichte von \vec{a} :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad \iint_F \vec{a} \cdot d\vec{F} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{a} \, dV = \iiint_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) \cdot dV$$

V: Körper (Volumenbereich), ganz im Definitionsbereich eines Vektorfeldes \vec{a} .
 F: Gesamte Oberfläche von V, nach aussen orientiert.

Das Volumenintegral eines skalaren Feldes $u(P)$:

$$\iiint_V u(P) \, dV = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \sum_{\text{alle } \Delta V_i} u(P_i) \cdot \Delta V_i$$

wobei V in kleine Stücke ΔV_i aufgeteilt wird.

16. Methode der kleinsten Quadrate

16.1. Regression

Gegeben sind Punkte $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ und eine bestimmte Klasse von Funktionen (z.B. Polynome eines bestimmten Grades). Nun wird diejenige Funktion (f) aus dieser Klasse gesucht, welche die vorgegeben Punkte am besten approximiert: $f(x_i) \approx y_i$

Mögliche Masse der Abweichung:

$$1) G = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n |y_i - f(x_i)| \quad 2) G = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2$$

Man verwendet häufiger die einfacher zu handhabende Fehlerquadratsumme (2) nach Gauss (least squares fitting). Um eine Funktion möglichst genau zu Approximieren sollte die Fehlerquadratsumme möglichst klein sein. Man sucht deshalb das globale Minimum von G.

Beispiel:

Anzupassende Funktion: $f(x) = A \cdot e^{-bx}$

Man setzt $f(x)$ in G ein, leitet G nach den Unbekannten Variablen (hier A und b) ab und setzt die Ableitungen gleich Null. Dabei erhält man ein nichtlineares Gleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial G}{\partial A} = -\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n 2 \cdot (y_i - A \cdot e^{-bx_i}) \cdot e^{-bx_i} = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial b} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n 2 \cdot (y_i - A \cdot e^{-bx_i}) \cdot A \cdot x_i \cdot e^{-bx_i} = 0 \end{array} \right|$$

16.2. Lineare Regression

Bei der linearen Regression hat die anzupassende Funktion nur lineare Parameter (die man anpassen kann):

$$f(x) = a_1 \cdot f_1(x) + a_2 \cdot f_2(x) + \dots + a_m \cdot f_m(x)$$

Die Funktionen $f_1 - f_m$ nennt man Basisfunktionen.

Beispiel:

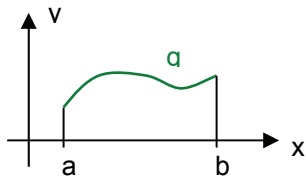
Polynome: $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_m \cdot x^m$

Basisfunktionen: $f_0(x) = 1, f_1(x) = x, \dots, f_m(x) = x^m$

Mit Hilfe der Basisfunktionen lässt sich jetzt ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der zugehörigen Parametern aufstellen:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \dots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \dots & f_2(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_m(x_1) & f_m(x_2) & \dots & f_m(x_n) \end{bmatrix} \quad \underline{F} \cdot \underline{F}' \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix} = \underline{F}' \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

16.3. Approximation über ein Intervall



Fehlerquadratsumme:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx$$

$$\underline{M} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \text{wobei} \quad \begin{cases} M_{ik} = \int_a^b f_i(x) \cdot f_k(x) dx \\ b_k = \int_a^b g(x) \cdot f_k(x) dx \end{cases}$$

Spezialfall:

$$\text{Wenn } \int_a^b f_i(x) \cdot f_k(x) dx = 0 \text{ für } i \neq k \Rightarrow \begin{cases} M_{11} \cdot a_1 = b_1 \\ M_{22} \cdot a_2 = b_2 \\ \dots \end{cases} \Rightarrow a_k = \frac{b_k}{M_{kk}}$$

17. Fourier-Analyse

17.1. Fourierreihen

Eine periodische Funktion $f(x)$ lässt sich als unendliche trigonometrische Reihe (Fourierreihe) darstellen mit folgender Form:

$$F_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cdot \cos(k\omega t) + b_k \cdot \sin(k\omega t)$$

$f(x)$ periodisch, Periode T , $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt = \text{Mittelwert von } f \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot \cos(k\omega t) dt \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot \sin(k\omega t) dt \end{aligned}$$

Bemerkungen:

Mit wachsendem n wird die Approximation besser (mehr Basisfunktionen zur Verfügung).

Die schon berechneten Koeffizienten bleiben gleich, es kommen einfach neue dazu.

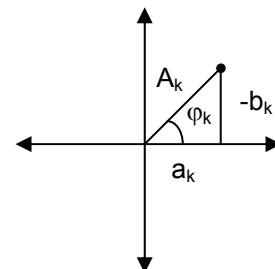
$a_k \cdot \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) = k$ -te Harmonische von f
 $= (k-1)$ te Oberschwingung von f

$k = 1$: Grundschwingung
 $k = 2$: Erste Oberschwingung, ...

$$\begin{aligned} a_k &= A_k \cdot \cos(\varphi_k) \\ b_k &= -A_k \cdot \sin(\varphi_k) \end{aligned}$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

$$\varphi_k = \text{Winkel}((a_k, -b_k)) = \arg(a_k - jb_k)$$



17.2. Satz von Dirichlet

$F(t)$ ist überall definiert (d.h. die Reihe konvergiert für alle t . $F(t) = f(t)$ an jeder Stelle t , wo f stetig ist), wenn die Funktion f und ihre Ableitung f' folgende Bedingungen erfüllen:

- Nur endlich viele Unstetigkeitsstellen pro Periode.
- Die Unstetigkeitsstellen sind nur endliche Sprungstellen, d.h. es existieren jeweils die links- und rechtsseitigen Grenzwerte.

In den Sprungstellen von $f(x)$ liefert die Fourierreihe das arithmetische Mittel aus dem links- und rechtsseitigen Grenzwert der Funktion.

17.3. Gibbs-Effekt

Überschwingen von $F_n(t)$ in der Umgebung einer Sprungstelle von f .

—

—

17.5. Geometrische Operationen

- 1) **Verschieben** des Graphen von $f(t)$ um C in **y-Richtung**:

$$\bar{f}(t) = f(t) + C \rightarrow \bar{a}_0 = a_0 + C$$

Alle übrigen Koeffizienten bleiben unverändert.

- 2) **Strecken** des Graphen von $f(t)$ mit Faktor C in **y-Richtung**:

$$\bar{f}(t) = C \cdot f(t) \rightarrow \bar{a}_0 = a_0 \cdot C \quad \bar{a}_k = a_k \cdot C \quad \bar{b}_k = b_k \cdot C$$

- 3) **Strecken** des Graphen von $f(t)$ mit Faktor C ($C > 0$) in **x-Richtung**:

$$\bar{f}(t) = f(C \cdot t) \rightarrow \bar{\omega} = \omega \cdot C \quad \bar{T} = \frac{T}{C}$$

ω wird durch $\omega \cdot C$ ersetzt. Die Koeffizienten bleiben unverändert.

- 4) **Verschiebung** des Graphen von $f(t)$ um C in **x-Richtung**:

$$\bar{f}(t) = f(t - C) \rightarrow \begin{aligned} \bar{a}_k &= a_k \cdot \cos(k\omega C) - b_k \cdot \sin(k\omega C) \\ \bar{b}_k &= a_k \cdot \sin(k\omega C) + b_k \cdot \cos(k\omega C) \end{aligned}$$

$C > 0$: Verschiebung nach rechts.

$C < 0$: Verschiebung nach links.

17.6. Ableiten und Integrieren einer Fourierreihe

Ableiten:

Wenn eine Funktion $f(t)$ Sprungstellen hat und man deren Fourierreihe gliedweise ableitet, sind die Koeffizienten \bar{a}_k, \bar{b}_k der Fourierreihe von $f(t)'$ proportional zu Eins. Das heisst die Reihe von $f(t)'$ ist nicht konvergent und somit nicht eine gültige Ableitung der Fourierreihe von $f(t)$:

$$\rightarrow a_k, b_k \sim \frac{1}{k} \rightarrow \bar{a}_k, \bar{b}_k \sim 1 \text{ (konst.)}$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(k\omega t) + b_k \cdot \sin(k\omega t)$$

$$f(t)' = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{-a_k \cdot k\omega}_{\bar{b}_k} \cdot \sin(k\omega t) + \underbrace{b_k \cdot k\omega}_{\bar{a}_k} \cdot \cos(k\omega t)$$

Falls jedoch die Funktion $f(t)$ stetig (keine Sprungstellen) ist, konvergiert die Reihe von $f(t)'$ und ist somit eine gültige Ableitung von der Fourierreihe:

$$\rightarrow a_k, b_k \sim \frac{1}{k^2} \rightarrow \bar{a}_k, \bar{b}_k \sim \frac{1}{k}$$

wobei $\bar{a}_k = k\omega b_k$ und $\bar{b}_k = -k\omega a_k$

Integrieren

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(k\omega t) + b_k \cdot \sin(k\omega t)$$

↓ summandenweise Integrieren

$$\bar{f}(t) = C + a_0 t + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{a_k}{k\omega}}_{\bar{b}_k} \cdot \sin(k\omega t) - \underbrace{\frac{b_k}{k\omega}}_{\bar{a}_k} \cdot \cos(k\omega t)$$

Falls $a_0 = 0$, ist $\bar{f}(t)$ eine Fourierreihe. $(\bar{a}_k = -\frac{b_k}{k\omega}, \bar{b}_k = \frac{a_k}{k\omega}, \bar{a}_0 = C)$

\bar{a}_k, \bar{b}_k gehen mit mindestens $\sim \frac{1}{k^2}$ gegen Null $\rightarrow \bar{f}$ stetig \rightarrow Fourierreihe von \bar{f} gliedweise abgeleitet gibt die Fourierreihe von \bar{f}'

Das heisst \bar{f} ist eine stetige Stammfunktion von $f(t)$ falls $a_0 = 0$.

17.7. Komplexe Fourierreihe

Komplexer Fourierkoeffizient c_k

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \cdot e^{jk\omega t}$$

wobei $c_k = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot e^{-jk\omega t} dt$

Umrechnung nach a_k und b_k

$$a_k = 2 \cdot \text{Re}(c_k) = c_k + c_k^* = c_k + c_{-k}$$

$$b_k = -2 \cdot \text{Im}(c_k) = j(c_k - c_k^*) = j(c_k - c_{-k})$$

Umrechnung nach A_k und φ_k

$$c_k = \frac{1}{2} \cdot (a_k - j \cdot b_k) = \frac{1}{2} \cdot A_k \cdot e^{j\varphi_k}$$

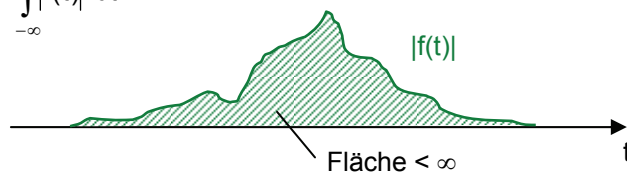
$$A_k = 2 \cdot |c_k|$$

$$\varphi_k = \arg(c_k)$$

17.8. Fourierintegral

Voraussetzung: Es existiert das uneigentliche Integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$$



Ausserdem muss $f(t)$ gegen 0 gehen für $t \rightarrow \infty$

Man wählt T so gross, dass $f(t) \approx 0$ ausserhalb des Intervalls $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$.

Repetiert man die Funktion $f\left[\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]\right]$ so erhält man eine T-periodische Funktion f_T mit $f_T(t) = f(t)$ für $t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$. Von f_T bildet man die Fourierreihe und macht dann den Grenzübergang $T \rightarrow \infty$.

Man erhält die Fouriertransformierte $F(y)$ von f :

Originalfunktion f Fourier- oder Spektralfunktion F

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y) \cdot e^{jyt} dy \iff F(y) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-jyt} dt \quad \text{wobei } y = k \cdot \omega \text{ (Frequenzvariable)}$$

17.9. Verschiebungssatz

Verschiebung im Zeitbereich entspricht der Modulation im Spektralbereich:

$$g(t) = f(t - C) \iff G(y) = e^{-jyC} \cdot F(y)$$

Der Amplitudengang bleibt gleich:

$$|G(y)| = |F(y)|$$

$$\arg(G(y)) = (\arg(F(y)) - yC) \pmod{2\pi}$$

18. Diskrete Fouriertransformation

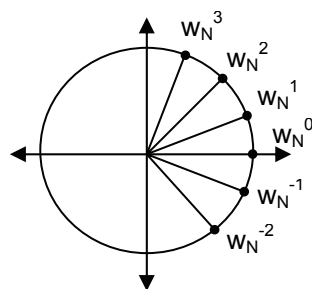
18.1. DFT- und IDFT-Matrix

Die diskrete Fouriertransformation kann zur Bestimmung von Näherungswerten der Fourierkoeffizienten einer periodischen Funktion oder Funktionswerten $F(y)$ der Spektralfunktion einer L^1 -Funktion f .

$$(u_0, u_1, u_2, \dots, u_{N-1}) \xrightarrow{\text{DFT}} (z_0, z_1, z_2, \dots, z_{N-1})$$

N-Werte $\in \mathbb{R}$ oder $\in \mathbb{C}$ N-Werte $\in \mathbb{C}$

$$z_k = \sum_{l=0}^{N-1} e^{-j \cdot \frac{k \cdot l}{N} \cdot 2\pi} \cdot u_l = \sum_{l=0}^{N-1} w_N^{-k \cdot l} \cdot u_l \quad \text{wobei } w_N = e^{j \frac{2\pi}{N}}$$



$$w_N^N = 1$$

Deshalb wird w_N auch als eine n-te Einheitswurzel bezeichnet, wobei die anderen die Potenzen davon sind.

$$\text{wenn } N \text{ gerade: } w_N^{\frac{N}{2}} = -1$$

In Matrix-Schreibweise:

$$\begin{bmatrix} z_0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ z_{N-1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w_N^{-1} & w_N^{-2} & \dots & w_N^{-(N-1)} \\ 1 & w_N^{-2} & w_N^{-4} & \dots & w_N^{-2(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & w_N^{-(N-1)} & w_N^{-2(N-1)} & \dots & w_N^{-(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}}_{\text{DFT}_N} * \begin{bmatrix} u_0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ u_{N-1} \end{bmatrix} \quad (\text{DFT}_N)_{kl} = w_N^{-kl} \quad (0 \leq k, l \leq N-1)$$

Beispiele:

$$\text{DFT}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{DFT}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{3}} & e^{-j\frac{4\pi}{3}} \\ 1 & e^{-j\frac{4\pi}{3}} & e^{-j\frac{8\pi}{3}} \end{bmatrix} \quad \text{DFT}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$

$$\text{DFT}_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{\pi}{3}} & e^{-j\frac{2\pi}{3}} & -1 & e^{-j\frac{4\pi}{3}} & e^{-j\frac{5\pi}{3}} \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{3}} & e^{-j\frac{4\pi}{3}} & 1 & e^{-j\frac{8\pi}{3}} & e^{-j\frac{10\pi}{3}} \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & e^{-j\frac{4\pi}{3}} & e^{-j\frac{8\pi}{3}} & 1 & e^{-j\frac{16\pi}{3}} & e^{-j\frac{20\pi}{3}} \\ 1 & e^{-j\frac{5\pi}{3}} & e^{-j\frac{10\pi}{3}} & -1 & e^{-j\frac{20\pi}{3}} & e^{-j\frac{25\pi}{3}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \text{DFT}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \text{DFT}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \text{DFT}_N = \begin{bmatrix} N \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Inverse diskrete Fouriertransformation

$$(\text{DFT}_N)^{-1} = \frac{1}{N} \cdot \text{DFT}_N^* \quad u_l = \sum_{k=0}^{N-1} w_N^{kl} \cdot z_k$$

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ u_{N-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w_N^1 & w_N^2 & \dots & w_N^{N-1} \\ 1 & w_N^2 & w_N^4 & \dots & w_N^{2(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & w_N^{N-1} & w_N^{2(N-1)} & \dots & w_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}}_{\text{IDFT}_N} * \begin{bmatrix} z_0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ z_{N-1} \end{bmatrix}$$

18.2. Eigenschaften der DFT

1) Linearität

Aus den Rechenregeln für Matrizen folgt z.B. das Distributivgesetz:

$$\begin{aligned} u = v + w &\Rightarrow \text{DFT}(u) = \text{DFT}(v) + \text{DFT}(w) \\ u = \lambda \cdot v &\Rightarrow \text{DFT}(u) = \lambda \cdot \text{DFT}(v) \end{aligned}$$

2) Alle u sind reell

$$z_{N-k} = z_k^* \text{ für } k = 1, \dots, N-1$$

$$z = \text{DFT}(u) \rightarrow \begin{matrix} z_0 & z_1 & z_2 & \dots & \dots & z_{N-2} & z_{N-1} \\ & & \underbrace{\hspace{10em}} & & & & \\ & & & & & & * \end{matrix}$$

Daraus folgt:
$$z_k^* = \sum_{l=0}^{N-1} w_N^{kl} \cdot u_l$$

3) $u = [\underbrace{a_0, \dots, a_{N/2-1}}_a, \underbrace{a_0, \dots, a_{N/2-1}}_a] = (a, a)$ (N = gerade)

$\rightarrow \text{DFT}(u) = 2 \cdot \text{Spreiz}(\text{DFT}(a)) = (2y_0, 0, 2y_1, 0, \dots)$ wobei $y = \text{DFT}(a)$

$$z_k = \begin{cases} 2 \cdot \sum_{l=0}^{N/2-1} w_N^{-kl} \cdot a_l & \text{falls k gerade} \\ 0 & \text{falls k ungerade} \end{cases}$$

4) Setzt man die Folgen N-periodisch fort, so gelten die Formeln:

$$z_k = \sum_{l=0}^{N-1} w_N^{-k \cdot l} \cdot u_l, \quad u_l = \sum_{k=0}^{N-1} w_N^{kl} \cdot z_k$$

$z_{-k} = z_{n-k} = z_k^*$ falls u reell

(Analog bei Fourierreihen: $c_{-k} = c_k^*$)

5) $u = (a_0, 0, a_1, 0, a_2, 0, \dots)$

$u = \text{Spreiz}(a)$

$\xrightarrow{\text{DFT}_N} z = (\text{DFT}_{\frac{N}{2}}(a), \text{DFT}_{\frac{N}{2}}(a))$ falls N gerade

6) Verschiebungssatz

v entsteht aus u durch Verschieben (Rotieren) um r Komponenten nach rechts:

$\rightarrow \text{DFT}_N(v) = (1, w_N^{-r}, w_N^{-2r}, \dots, w_N^{-(N-1)r}) \cdot \text{DFT}_N(u)$

$$u = (u_0^V, u_1, \dots, u_{N-1})^T \quad v_{r+1}$$

$$v = (u_{N-r}, \dots, u_{N-1}, u_0, u_1, \dots, u_{N-r-1})$$

$v_l = u_{l-r}$ da $u_{N-r} = u_{-r}$

$$y = \text{DFT}_N(v)$$

$$y_k = \sum_{l=0}^{N-1} w_N^{-kl} \cdot v_l = \sum_{l=0}^{N-1} w_N^{-kl} \cdot u_{l-r} \quad \text{mit } l-r = p$$

$$y_k = \sum_{p=-r}^{N-1-r} w_N^{-k(r+p)} \cdot u_p = \boxed{y_k = w_N^{-kr} \cdot \sum_{p=-r}^{N-1-r} w_N^{-kp} \cdot u_p}$$

= z_k wegen der Periodizität von u und der Potenzen von w_N .

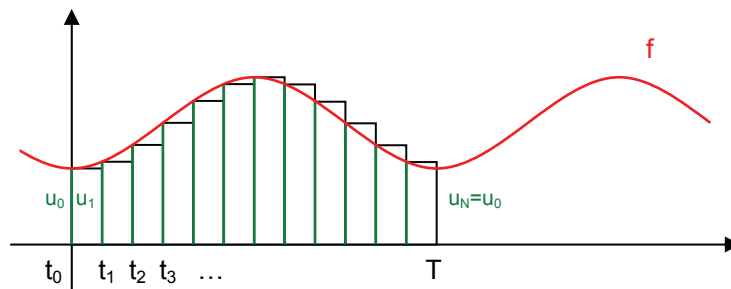
18.3. Anwendungen

Die DFT verwendet man um:

- Näherungswerte für Fourierkoeffizienten c_k einer periodischen Funktion.
- Näherungswerte für Funktionswerte der Fouriertransformierten einer L^1 -Funktion

zu berechnen.

Näherungswerte für Fourierkoeffizienten c_k im Intervall $[0, T]$



$$t_0 = 0 \quad t_N = T \quad \Delta t = \frac{T}{N} \quad t_l = l \cdot \Delta t = l \cdot \frac{T}{N}$$

$$u_N = u_0 \quad u_{N+1} = u_1 \quad u_l = f(t_l)$$

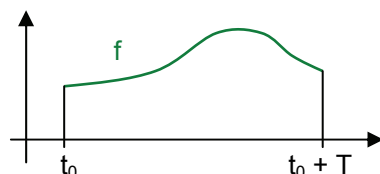
$$\boxed{c_k = \frac{1}{N} \cdot \text{DFT}_N(u)_k}$$

Für welche Werte von k ist die Näherung $c_k \approx \frac{1}{N} \cdot z_k$, wo $z = \text{DFT}_N(u)$ brauchbar?
 (z_k ist N -periodisch, $c_k \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \pm\infty$)

Pro Periode der Schwingung mit Kreisfrequenz $k \cdot \omega$ müssen mindestens zwei Abtastpunkte vorkommen.

$$\text{d.h. } \Delta t \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{|k| \cdot \omega} = \frac{1}{2} \cdot \frac{T}{|k|} \Rightarrow |k| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{T}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{|k| \leq \frac{N}{2}}$$

Näherungswerte für Fourierkoeffizienten c_k im Intervall $[t_0, t_0 + T]$



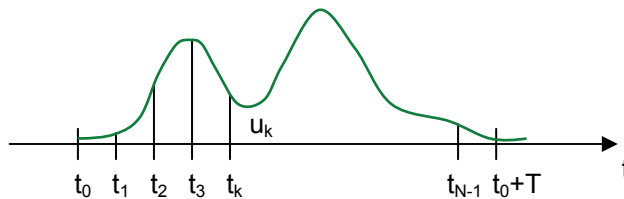
$$f \xrightarrow{\text{Verschiebung}} g \quad g(t) = f(t + t_0)$$

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \cdot e^{jk\omega t} \Rightarrow g(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \cdot e^{jk\omega(t+t_0)}$$

$$g(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \underbrace{c_k \cdot e^{jk\omega t_0}}_{\bar{c}_k \text{ Fourierkoeff. für } g} \cdot e^{jk\omega t} \quad z = \text{DFT}_N(u) \Rightarrow \bar{c}_k \approx \frac{1}{N} \cdot z_k \quad \text{mit } \bar{c}_k = c_k \cdot e^{jk\omega t_0}$$

$$c_k \approx \frac{1}{N} \cdot z_k \cdot e^{-jk\omega t_0} \quad \text{für } |k| \leq \frac{N}{2}$$

Näherungswerte für Funktionswerte der Fouriertransformierten



Nur für die Werte $y_k = \frac{2\pi}{N \cdot \Delta t} = \frac{2\pi}{T} \cdot k$ erhält man Näherungswerte für die Fouriertransformierte:

$$F(y_k) \approx \frac{\Delta t}{2\pi} \cdot e^{-jy_k t_0} \cdot \text{DFT}_N(u)_k \quad 0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1$$

$$\Delta t = \frac{T}{N} \quad [t_0, t_0 + T] = \text{Intervall, ausserhalb dessen } f(t) \approx 0, N = \text{Anzahl Abtastwerte.}$$

$$\Delta y = \frac{2\pi}{N \cdot \Delta t} = \frac{2\pi}{T}$$

19. Fouriertransformation mit MATLAB

19.1. Koeffizienten mit Trapezintegration berechnet

```
T=1; w=2*pi/T;
n=10; k=1:n;
c=2*T/3;

% Funktion
x=linspace(0,T,10*n);
y=[ones(1,round(10*n*c/T)), zeros(1,10*n-round(10*n*c/T))];
oder
y=x.*(1-x);

% Koeffizienten
a0=trapz(x,y)/T
a=trapz(x',(repmat(y,n,1).*cos(k'*w*x))')*2/T
b=trapz(x',(repmat(y,n,1).*sin(k'*w*x))')*2/T

% Spektrum
A=sqrt(a.^2+b.^2);
phi=atan2(-b,a);
figure(1);
subplot(211); bar(A); title('Amplituden');
subplot(212); bar(phi); title('Phasen');
```

```
% Graph der Approximation
figure(2);
xx=linspace(0,2*T,20*n);
yy=a0+a*cos(k'*w*xx)+b*sin(k'*w*xx);
plot([x x+T],[y y],xx,yy,'r');
grid on;
```

19.2. Koeffizienten symbolisch berechnet

```
n=10; k=1:n;

% Funktion
syms x y;
T=1; y=x*(1-x); x0=0;

% Koeffizienten
w=2*pi/T;
tic;
a0=int(y,x0,x0+T)/T
a=int(y*cos(k*w*x),x0,x0+T)*2/T
b=int(y*sin(k*w*x),x0,x0+T)*2/T
toc;
a0=double(a0), a=double(a), b=double(b)

% Spektrum
Siehe Beispiel 20.1

% Graph der Approximation
figure(2);
xx=linspace(0,2*T,20*n);
yy=a0+a*cos(k'*w*xx)+b*sin(k'*w*xx);
plot(xx,subs(y,x,xx),xx,yy,'r');
grid on;
```

19.3. Fourierapproximation mit fft

```
clear x y;
T=3; w=2*pi/T;
n=50; k=1:n;

% Funktion
N=n*3;
x=linspace(-1,T-1,N+1); x=x(1:N); x=x+T/(2*N);
u=[ones(1,2*N/3) zeros(1,N/3)];

% komplexe Fourierkoeffizienten aus fft
c=fft(u)/N.*exp(-j*(0:N-1)*w*x(1));
% reelle Fourierkoeffizienten
a0=c(1)
a=real(c(2:n+1))*2
b=-imag(c(2:n+1))*2

% Spektrum (aus komplexen Koeff. berechnet)
A=abs(c(2:n+1))*2
phi=angle(c(2:n+1))
figure(1);
subplot(211); bar(A); title('Amplituden');
subplot(212); bar(phi); title('Phasen');
% Graph der Approximation
```

```
figure(2);
xx=linspace(0,2*T,10*n);
yy=a0+a*cos(k'*w*xx)+b*sin(k'*w*xx);
plot(x,u,xx,yy,'r');
grid on;
```

19.4. Heaviside

```
function y=Heaviside(x)
y = (x >= 0);
```

19.5. Fouriertransformierte mit fft

```
T = 2;
N = 100;
off = 0.01;
x = linspace(-T/2+off,T/2+off,N);
t0 = x(1);
dt = T/N;
k = 0:1:(N-1)/2;
dy = (2*pi)/T;
yk = dy .* k;

% Function
u = ((1-abs(x)).*Heaviside(x+1) + (x-1).*Heaviside(x-1));

u = fft(u);

% Fouriertransformierte siehe Kap. 19.3
F = real(dt/(2*pi) .* exp(-j.*yk.*t0) .* u(1:length(k)));

plot(yk,F);
```

20. Differentialgleichungen

20.1. Grundbegriffe

Ordnung

Die Ordnung einer Differentialgleichung (Dgl.) ist die höchste vorkommende Ableitungsordnung der gesuchten Funktion(en):

Beispiel Ordnung drei: $5y'''(x) + x^2 \cdot y''(x) \cdot y'(x) + \sqrt{y(x)^2 + 1} = \sin(3x)$

Partielle Differentialgleichung

Eine partielle Dgl. ist eine Dgl. für Funktionen von mehreren Variablen.

z.B.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Gesucht: $u(P) = u(x, y, z)$ (skalares Feld)

Dgl. für Funktionen **einer** Variablen nennt man **gewöhnliche** Dgl..

Differentialgleichungssysteme

So genannte Differentialgleichungssysteme bestehen aus mehreren Gleichungen für mehrere gesuchte Funktionen.

z.B.
$$\frac{1}{r^3} \cdot \vec{r}(t) = -k \cdot \vec{r}''(t) \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad r = |\vec{r}(t)|$$

Ergibt ein System von 3 Dgl. für 3 gesuchte Funktionen $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$.

Linearität

Eine Dgl. heisst linear, wenn die gesuchten Funktionen und ihre Ableitungen nur linear vorkommen. Das oben gezeigte Differentialgleichungssystem ist nicht linear wegen $\frac{1}{r^3} \cdot \vec{r} \dots$

Folgende Gleichung ist linear, da Produkte gegebener Funktionen erlaubt sind:

$$(x^2 + 1) \cdot y'(x) + \tan(x) \cdot y(x) = e^{-x}$$

Die allgemeinste lineare Dgl. 2. Ordnung (gewöhnlich) für eine gesuchte Funktion $y(x)$ sieht so aus:

$$a_2(x) \cdot y''(x) + a_1(x) \cdot y'(x) + a_0(x) \cdot y(x) = g(x)$$

20.2. Separierbare Differentialgleichungen

Eine Dgl. 1. Ordnung für eine gesuchte Funktion $y(x)$ heisst separierbar, wenn sie sich in folgender Form schreiben lässt:

$$h(y) \cdot y' = g(x)$$

Lösungsweg

Beide Seiten integrieren:

$$\int h(y) \cdot y' \, dx = \int g(x) \, dx \quad \rightarrow \quad \int h(y) \cdot \frac{dy}{dx} \, dx = \int g(x) \, dx$$

$$\int h(y) \, dy = \int g(x) \, dx$$

Wenn die beiden Integrale $H(y) = \int h(y) \, dy$ und $G(x) = \int g(x) \, dx$ gelöst werden können, erhält man folgende Gleichung:

$$H(y(x)) = G(x)$$

Diese gewöhnliche Gleichung für $y(x)$ kann nun nach $y(x)$ aufgelöst werden $\rightarrow y(x) = \dots$

Beispiel

$$2y' + 5y = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y' = -5y \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{y} \cdot y' = -5$$

$$\int \frac{2}{y} \cdot \frac{dy}{dx} \, dx = \int -5 \, dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{2}{y} \, dy = -5x + C \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \ln(|y|) = -5x + C$$

$$\ln(|y|) = -\frac{5}{2}x + \frac{C}{2} \quad \Rightarrow \quad y = e^{-\frac{5}{2}x + \frac{C}{2}} \quad \Rightarrow \quad y = \underbrace{e^{\frac{C}{2}}}_{\text{Neue Konstante } D} \cdot e^{-\frac{5}{2}x} \quad \Rightarrow \quad y = D \cdot e^{-\frac{5}{2}x}$$

Dies ist also die allgemeine Lösung, d.h. eine Lösung mit Parametern (D), so dass man jede spezielle Lösung durch Spezifikation der Parameter erhalten kann. Z.B. durch eine Anfangsbedingung.

20.3. Lineare Differentialgleichungen

Allgemein

Eine lineare Dgl. n-ter Ordnung für eine gesuchte Funktion $y(x)$ sieht wie folgt aus:

$$a_n(x) \cdot y^{(n)}(x) + \dots + a_2(x) \cdot y''(x) + a_1(x) \cdot y'(x) + a_0(x) \cdot y(x) = g(x)$$

$$L(x, y(x))$$

$$L(x, y(x)) = g(x)$$

inhomogene lineare Differentialgleichung

$$L(x, y(x)) = 0$$

zugehörige homogene Differentialgleichung

Eigenschaften

- Bei einer homogenen Gleichung kann man Lösungen linear kombinieren:

$$L(x, y_1(x)) = 0, \quad L(x, y_2(x)) = 0 \quad \rightarrow \quad L(x, C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)) = 0$$

$$y_h(x) = C_1 \cdot L(x, y_1(x)) + C_2 \cdot L(x, y_2(x))$$

Beispiel

$$y'' + 4y = 0 \Rightarrow y'' = -4y$$

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \sin(2x) \\ y_2 &= \cos(2x) \end{aligned} \right\} \text{Lösungen der Dgl.}$$

$\Rightarrow y(x) = C_1 \cdot \cos(2x) + C_2 \cdot \sin(2x)$ ist somit auch eine Lösung der Dgl.

- Falls $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösungen der inhomogenen Dgl. sind ist die Differenz der beiden Funktionen die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Dgl.:

$$y_h(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

- Falls $y_1(x)$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Dgl. und $y_h(x)$ die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Dgl. ist, entspricht die Summe der beiden Lösungen der allgemeinen Lösung der inhomogenen Dgl.

$$y_{\text{inhomogen,allgemein}} = y_{\text{inhomogen,partikulär}} + y_{\text{homogen,allgemein}}$$

Beispiel

$$y'' + 4y = 2$$

$$y_h(x) = C_1 \cdot \cos(2x) + C_2 \cdot \sin(2x) = \text{allg. Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung (siehe vorheriges Beispiel)}$$

$$y_p(x) = \frac{1}{2} = \text{konstante partikuläre Lösung (erraten)}$$

$$\rightarrow y(x) = y_p + y_h = \underline{\underline{\frac{1}{2} + C_1 \cdot \cos(2x) + C_2 \cdot \sin(2x)}} \text{ (Allgemeine Lösung)}$$

20.4. Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Allgemein

Eine lineare Dgl. 1. Ordnung für eine gesuchte Funktion $y(x)$ sieht wie folgt aus:

$$a_1(x) \cdot y'(x) + a_0(x) \cdot y(x) = g(x)$$

Zugehörige homogene Gleichung:

$$a_1(x) \cdot y'(x) + a_0(x) \cdot y(x) = 0$$

Homogener Fall

Die allgemeine Lösung einer linearen, homogenen Gleichung 1. Ordnung lautet wie folgt:

$$y(x) = C \cdot e^{-\int \frac{a_0(x)}{a_1(x)} dx}$$

Wenn a_1 und a_2 konstant sind:

$$y(x) = C \cdot e^{\frac{-a_0(x)}{a_1(x)}x}$$

Beispiel

$$y'+2y = 0 \Rightarrow y(x) = C \cdot e^{-2x}$$

Inhomogener Fall

Es gibt verschiedene Methoden eine partikuläre Lösung einer inhomogenen Gleichung zu bestimmen. Bei sehr einfachen Dgl. kann man z.B. eine Lösung erraten. Bei komplizierteren Dgl. verwendet man folgende Tricks:

- Ansatz in der Art der Störfunktion
- Variation der Konstanten

Ansatz in der Art der Störfunktion

Dieser Trick wird häufig angewendet, wenn die Koeffizienten a_1 und a_0 konstant sind.

$$3y'+2y = 10 \cdot \sin(2x)$$

Ansatz: $y_p(x) = A \cdot \cos(2x) + B \cdot \sin(2x)$

$$y_p'(x) = -2A \cdot \sin(2x) + 2B \cdot \cos(2x)$$

A und B sind keine Parameter, sondern müssen so festgelegt werden, dass $y(x)$ überhaupt eine Lösung der inhomogenen Gleichung ist. Ist dies möglich, so wurde eine partikuläre Lösung gefunden.

Der gewählte Ansatz wird dann in die Dgl. eingesetzt:

$$-6A \cdot \sin(2x) + 6B \cdot \cos(2x) + 2A \cdot \cos(2x) + 2B \cdot \sin(2x) = 10 \cdot \sin(2x)$$

Mit einem Koeffizientenvergleich lassen sich dann A und B bestimmen:

$$\left. \begin{matrix} -6A + 2B = 10 \\ 2A + 6B = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow A = -\frac{3}{2} \quad B = \frac{1}{2}$$

Die partikuläre Lösung lautet demnach:

$$y_p(x) = -\frac{3}{2} \cdot \cos(2x) + \frac{1}{2} \cdot \sin(2x)$$

Beispiele für verschiedene Ansätze

| Störfunktion $g(x)$ | Ansatz | |
|------------------------------------|------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| $g(x) = 10 \cdot \sin(2x)$ | $y_p(x) = A \cdot \cos(2x) + B \cdot \sin(2x)$ | $y_p'(x) = -2A \cdot \sin(2x) + 2B \cdot \cos(2x)$ |
| $g(x) = 1 - x^2$ | $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$ | $y_p'(x) = 2Ax + B$ |
| $g(x) = -x \cdot e^x$ | $y_p(x) = (Ax + B) \cdot e^x$ | $y_p'(x) = Ae^x + (Ax + B) \cdot e^x$ |
| $g(x) = 5 \cdot e^{-\frac{2}{3}x}$ | $y_p(x) = C \cdot e^{-\frac{2}{3}x}$ | $y_p'(x) = -\frac{2}{3}C \cdot e^{-\frac{2}{3}x}$ |

Variation der Konstanten

Wenn der gewählte Ansatz gleich der allgemeinen Lösung der zugehörigen, homogenen Gleichung ist, versagt der Trick mit dem Ansatz in der Art der Störfunktion. In diesem Fall variiert man die Konstanten im gewählten Ansatz. Das heisst, wenn man folgenden Ansatz hat:

$$y_p(x) = C \cdot e^{-\frac{2}{3}x} \quad \text{schreibt man ihn mit variabler Konstante } C(x): \quad y_p(x) = C(x) \cdot e^{-\frac{2}{3}x}$$

Beispiel

$$3 \cdot y'(x) + 2 \cdot y(x) = 5 \cdot e^{-\frac{2}{3}x}$$

Ansatz mit variabler Konstante:

$$y_p(x) = C(x) \cdot e^{-\frac{2}{3}x} \quad y_p'(x) = C'(x) \cdot e^{-\frac{2}{3}x} - \frac{2}{3} \cdot C(x) \cdot e^{-\frac{2}{3}x}$$

Einsetzen des gewählten Ansatzes in die Dgl.:

$$3 \cdot C'(x) \cdot e^{-\frac{2}{3}x} - \cancel{3 \cdot \frac{2}{3} C(x) \cdot e^{-\frac{2}{3}x}} + \cancel{2 \cdot C(x) \cdot e^{-\frac{2}{3}x}} = 5 \cdot e^{-\frac{2}{3}x}$$

Koeffizientenvergleich:

$$3 \cdot C'(x) = 5 \quad \Rightarrow \quad \text{z.B. } C(x) = \frac{5}{3} \cdot x$$

Die partikuläre Lösung lautet demnach:

$$y_p(x) = \frac{5}{3} \cdot x \cdot e^{-\frac{2}{3}x}$$

20.5. Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Allgemein

Eine lineare Dgl. 2. Ordnung für eine gesuchte Funktion $y(x)$ mit konstanten Koeffizienten sieht wie folgt aus:

$$a \cdot y''(x) + b \cdot y'(x) + c \cdot y(x) = g(x) \quad a, b, c \text{ konstant}$$

Zugehörige homogene Gleichung:

$$a \cdot y''(x) + b \cdot y'(x) + c \cdot y(x) = 0$$

Homogener Fall

Um die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung zu bestimmen, benötigt man zwei linearunabhängige Lösungen $y_1(x), y_2(x)$. Dann gilt $y_h(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) = \text{allg. Lösung}$.

Die so genannte charakteristische Gleichung einer linearen Dgl. 2. Ordnung lautet:

$$ap^2 + bp + c = 0$$

Wenn diese charakteristische Gleichung 2 Lösungen p_1 und p_2 hat (d.h. $b^2 - 4ac \neq 0$), dann hat man zwei linearunabhängige Lösungen der homogenen Dgl.:

$$y_1(x) = e^{p_1 \cdot x}, \quad y_2(x) = e^{p_2 \cdot x}$$

1) Starke Dämpfung, aperiodischer Fall

$$b^2 - 4ac > 0$$

Die charakteristische Gleichung hat zwei reelle Lösungen p_1 und p_2 .

$$p_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

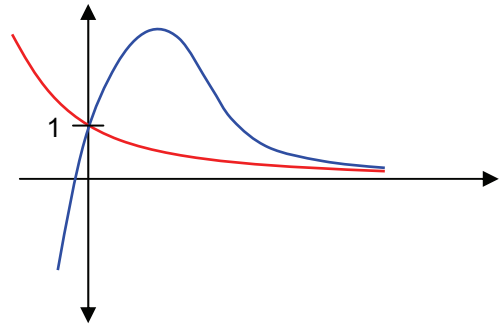
Somit lautet die allgemeine Lösung der homogenen Dgl.:

$$y_h(x) = C_1 \cdot e^{p_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{p_2 \cdot x}$$

Graph

Nullstelle $x_0 = \frac{\ln\left(-\frac{C_1}{C_2}\right)}{p_2 - p_1}$

Extremum $x_{\text{extrem}} = \frac{\ln\left(\frac{p_1 \cdot C_1}{p_2 \cdot C_2}\right)}{p_2 - p_1}$



2) Kritische Dämpfung, aperiodischer Fall

$$b^2 - 4ac = 0$$

Die charakteristische Gleichung hat nur eine reelle Lösung p .

$$p = -\frac{b}{2a}$$

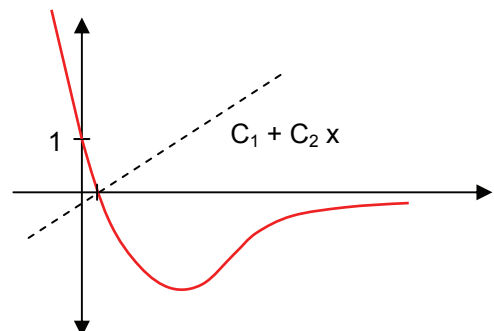
Somit lautet die allgemeine Lösung der homogenen Dgl.:

$$y_h(x) = (C_1 + C_2 \cdot x) \cdot e^{-\frac{b}{2a} \cdot x}$$

Graph

Nullstelle $x_0 = -\frac{C_1}{C_2}$ falls $C_2 \neq 0$

Extremum $x_{\text{extrem}} = \frac{2a}{b} - \frac{C_1}{C_2}$ falls $C_2 \neq 0$



3) Schwache Dämpfung, periodischer Fall

$$b^2 - 4ac < 0$$

Die charakteristische Gleichung hat zwei zueinander konjugiert, komplexe Lösungen:

$$p_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \omega j, \quad \omega = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

Somit lautet die allgemeine Lösung der homogenen Dgl.:

$$y_h(x) = e^{-\frac{b}{2a}x} (C_1 \cdot \cos(\omega x) + C_2 \cdot \sin(\omega x))$$

$$y_h(x) = A \cdot e^{-\frac{b}{2a}x} \cdot \cos(\omega x + \varphi)$$

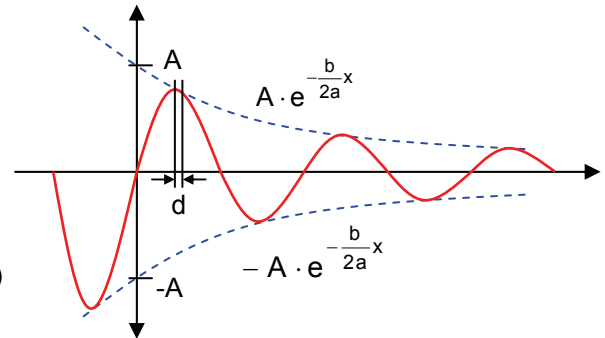
Graph

$$y'(x) = A \cdot e^{-\beta x} (-\beta \cdot \cos(..) - \omega \cdot \sin(..))$$

mit $\beta = \frac{b}{2a}$

Extrema bei $\tan(..) = -\frac{\beta}{\omega}$

d.h. $\omega t + \varphi = -\arctan\left(\frac{\beta}{\omega}\right) + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$



Berührungspunkte bei $\cos(..) = \pm 1$

d.h. $\omega t + \varphi = k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Verschiebung der **Phasen zwischen Extrema und Berührungspunkt** ist:

$$d = \arctan\left(\frac{\beta}{\omega}\right)$$

Die **Zeitverschiebung** ist $\frac{d}{\omega} = \frac{1}{\omega} \cdot \arctan\left(\frac{\beta}{\omega}\right)$

Inhomogener Fall

Bei der inhomogenen Dgl. wendet man die selben beiden Lösungsverfahren, wie bei den linearen Dgl. 1. Ordnung, an um eine partikuläre Lösung zu finden:

- Ansatz in der Art der Störfunktion
- Variation der Konstanten

21. Laplace-Transformation

21.1. Methode der Laplace-Transformation

Idee der Laplace-Transformation ist es, dass man eine Differentialgleichung in den Spektralbereich transformiert, die dabei entstandene algebraische Gleichung auflöst und das Resultat dann wieder in den Zeitbereich zurücktransformiert.

Transformation

$$f \text{ (Kreis) } \longrightarrow \text{ (Kreis) } F \quad \text{mit} \quad F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$$

s ist eine komplexe Variable. F(s) ist definiert für $\text{Re}(s) \geq \alpha$ (α ist von f abhängig).

Die zu transformierende Funktion f(t) muss folgende Bedingungen erfüllen:

- Es muss sich um eine kausale Funktion handeln. D.h. $f(t) = 0$ für $t < 0$
- $\int_0^{\infty} |f(t)| \cdot e^{-\alpha t} dt < \infty$ für irgendein α

Rücktransformation

$$F \text{ (Kreis) } \longrightarrow \text{ (Kreis) } f \quad \text{mit} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) \cdot e^{st} ds$$

Die Formel ist nur von theoretischem Interesse, in der Praxis verwendet man normalerweise zur Rücktransformation Tabellen oder symbolische Rechner.

21.2. Linearität der Laplace-Transformation

$$f(t) = g(t) + h(t) \Rightarrow F(s) = G(s) + H(s)$$

$$f(t) = C \cdot g(t) \Rightarrow F(s) = C \cdot G(s)$$

21.3. Sätze der Laplace-Transformation

Differentiationssatz

$$g(t) = f'(t) \Rightarrow G(s) = s \cdot F(s) - f(0)$$

$$g(t) = f''(t) \Rightarrow G(s) = s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0)$$

Dämpfungssatz

$$g(t) = f(t) \cdot e^{-ct} \Rightarrow G(s) = F(s + c)$$

Verschiebungssatz

$$g(t) = f(t - a) \Rightarrow G(s) = e^{-as} \cdot F(s) \quad \text{für } a > 0$$

Integrationsatz

$$F(s) = \frac{1}{s} \cdot G(s) \quad \bullet \text{---} \circ \quad f(t) = \int_0^t g(\tau) \, d\tau$$

Faltungssatz

$$H(s) = F(s) \cdot G(s) \quad \bullet \text{---} \circ$$

$$h(t) = \int_0^t f(t-\tau) \cdot g(\tau) \, d\tau$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) \cdot g(\tau) \, d\tau$$

$$f(t-\tau) = 0 \quad \text{für} \quad \tau > t$$

$$g(\tau) = 0 \quad \text{für} \quad \tau < 0$$

$h = f * g$ Faltung von f mit g

Ähnlichkeitssatz

$$g(t) = f(at) \quad \circ \text{---} \bullet \quad G(s) = \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Grenzwertsätze

Wenn man $F(s)$ hat und die Grenzwerte $f(0)$ oder $f(\infty)$ bestimmen möchte, ohne dass man die Laplace-Transformierte $F(s)$ zurücktransformiert, kann man die Grenzwertsätze verwenden.

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s)$$

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$$

Es ist möglich, dass $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ nicht existiert, wohl aber $\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$.

21.4. Laplace-Transformation bei RLC-Netzwerken

Widerstand R

$$u(t) = R \cdot i(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad U(s) = R \cdot I(s)$$

Kondensator C

$$i(t) = C \cdot u'(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad C \cdot (s \cdot U(s) - u_0)$$

$$U(s) = \frac{1}{s \cdot C} \cdot I(s) + \frac{u_0}{s} \quad \Rightarrow \quad U(s) - \frac{u_0}{s} = \frac{1}{s \cdot C} \cdot I(s)$$

Spule L

$$u(t) = L \cdot i'(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad U(s) = L \cdot (s \cdot I(s) - i_0) = s \cdot L \cdot \left(I(s) - \frac{i_0}{s} \right)$$

Man kann sagen R, C, L haben die Laplace-Impedanzen:

$$R, \quad \frac{1}{s \cdot C}, \quad s \cdot L$$

Anfangswerte von $u(t)$ bei C bzw. $i(t)$ bei L werden als konstante Quellen betrachtet.

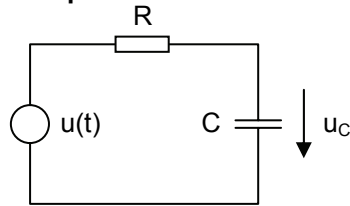
Formale Analogie

Laplace-Impedanzen \longleftrightarrow Impedanzen der Wechselstromtechnik

$$s \longleftrightarrow j\omega$$

Lösungen können mittels den Laplace-Impedanzen berechnet werden ohne Dgl. aufzustellen.

Beispiel



$u(t)$ gegeben
 $u_c(t)$ gesucht
 $u_c(0) = 0$

$$U(s) = R \cdot I(s) + \frac{1}{sC} \cdot I(s) = \left(R + \frac{1}{sC} \right) \cdot I(s) \quad \text{mit} \quad U_C(s) = \frac{1}{sC} \cdot I(s)$$

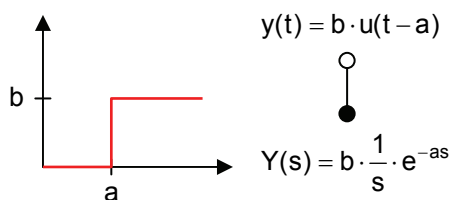
$$U(s) = (1 + RCs) \cdot U_C(s)$$

$$\rightarrow U_C(s) = \frac{1}{1 + RCs} \cdot U(s) \quad \bullet \text{---} \circ \quad u_c(t) = \dots$$

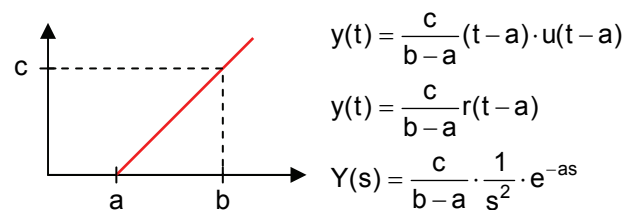
21.5. Laplace-Tabelle

| $f(t)$ für $k \geq 0$ | $F(s)$ |
|--------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | $\frac{1}{s}$ |
| e^{-ct} | $\frac{1}{s+c}$ |
| t | $\frac{1}{s^2}$ |
| $\sin(\omega t)$ | $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ |
| $\cos(\omega t)$ | $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$ |
| $t \cdot e^{-ct}$ | $\frac{1}{(s+c)^2}$ |
| $e^{-ct} \cdot \sin(\omega t)$ | $\frac{\omega}{(s+c)^2 + \omega^2}$ |
| $e^{-ct} \cdot \cos(\omega t)$ | $\frac{s+c}{(s+c)^2 + \omega^2}$ |

Allgemeiner Einheitssprung $u(t) / \varepsilon(t)$



Allgemeine Rampenfunktion



22. Partialbruchzerlegung

22.1. Definition

Eine echt gebrochenrationale Funktion ist als Summe sämtlicher Partialbrüche darstellbar. Besitzt $N(x)$ n verschiedene einfache Nullstellen c_1, c_2, \dots, c_n , so lautet die Partialbruchzerlegung.

$$r(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{A_1}{x - c_1} + \frac{A_2}{x - c_2} + \dots + \frac{A_n}{x - c_n}$$

22.2. Der Nenner $N(x)$ besitzt nur reelle Nullstellen

Jeder Nullstelle c_1 des Nenners $N(x)$ wird nach dem folgenden Schema in eindeutiger Weise ein Partialbruch zugeordnet:

$$c_1: \quad \text{Einfache Nullstelle} \quad \rightarrow \quad \frac{A}{x - c_1}$$

$$c_1: \quad \text{Zweifache Nullstelle} \quad \rightarrow \quad \frac{A_1}{x - c_1} + \frac{A_2}{(x - c_1)^2}$$

...

$$c_1: \quad r\text{-fache Nullstelle} \quad \rightarrow \quad \frac{A_1}{x - c_1} + \frac{A_2}{(x - c_1)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x - c_1)^r}$$

Beispiel:

$$r(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{-x^2 + 2x - 17}{x^3 - 7x^2 + 11x - 5} \quad (\text{echt gebrochenrationale Funktion})$$

Nullstellen des Nenners:

$$x^3 - 7x^2 + 11x - 5 = 0 \quad \rightarrow \quad c_{1/2} = 1 \quad c_3 = 5$$

Zuordnung der Partialbrüche:

$$x_{1/2} = 1 \text{ (zweifache Nullstelle):} \quad \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{(x - 1)^2}$$

$$x_3 = 5 \text{ (einfache Nullstelle):} \quad \frac{B}{x - 5}$$

Ansatz zur Partialbruchgleichung:

$$\frac{-x^2 + 2x - 17}{x^3 - 7x^2 + 11x - 5} = \frac{-x^2 + 2x - 17}{(x - 1)^2(x - 5)} = \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{(x - 1)^2} + \frac{B}{x - 5}$$

Berechnung der Konstanten A_1, A_2 und B :

$$\frac{- \quad + \quad +-}{- \quad -} = \frac{- \quad - \quad + \quad - \quad + \quad -}{(x - 1) (x - 5)} \rightarrow$$

Jetzt kann ein Koeffizientenvergleich durchgeführt werden:

$$A_1 = 1 \quad A_2 = 4 \quad B = -2$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{-x^2 + 2x - 17}{(x-1)^2(x-5)} = \frac{1}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2} - \frac{2}{x-5}$$

22.3. Zerlegung mit einfachen Nullstellen

Wenn nur einfache Nullstellen $L_k(s)$ auftreten, kann die Partialbruchzerlegung nach folgender Methode durchgeführt werden.

$$F(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{A}{L(s)} + \text{weitere Summanden}$$

$$\Rightarrow A = \frac{Z(c)}{N_1(c)} \quad \text{mit} \quad N_1(s) = \frac{N(s)}{L(s)}$$

Beispiel

$$G(s) = \frac{2 \cdot e^{-3s}}{s \cdot (s+1)}$$

$$G(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+1}$$

$$A_1 = \frac{Z(c)}{N_1(c)} = \frac{2 \cdot e^{-3c}}{c+1} \quad \text{mit} \quad N_1(s) = \frac{N(s)}{L_1(s)} = \frac{s \cdot (s+1)}{s} \quad \text{und Nullstelle von } s \text{ ist } c = 0$$

$$A_2 = \frac{Z(c)}{N_2(c)} = \frac{2 \cdot e^{-3c}}{s} \quad \text{mit} \quad N_2(s) = \frac{N(s)}{L_2(s)} = \frac{s \cdot (s+1)}{s+1} \quad \text{und Nullstelle von } (s+1) \text{ ist } c = -1$$

$$G(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+1} = \frac{2}{s} + \frac{\frac{2 \cdot e^3}{-1}}{s+1} = \frac{2}{s} - \frac{2 \cdot e^3}{s+1}$$

22.4. Zerlegung mit zweifachen Nullstellen

$$F(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{A_1}{s-c} + \frac{A_2}{(s-c)^2} + \text{übrige Summanden (mit anderen Polen)}$$

$$A_1 = \frac{Z'(c) \cdot N_2(c) - Z(c) \cdot N_2'(c)}{N_2(c)^2} = \frac{6 \cdot Z'(c) \cdot N_2'(c) - 2 \cdot Z(c) \cdot N_2''(c)}{3 \cdot N_2'(c)^2}$$

$$A_2 = \frac{Z(c)}{N_2(c)} = \frac{2 \cdot Z(c)}{N_2''(c)}$$

23. Stochastik

23.1. Kennzahlen

Mittelwert (mean) $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$

Median (median) 50% der Messwerte sind grösser und 50% kleiner als der Median

α - Quantil Wert, sodass $\alpha \cdot n$ Daten kleiner oder gleich sind und $(1 - \alpha) n$ Daten grösser.

Beispiel

30% - Quantil: 30% der Daten sind $\leq z_\alpha$ und 70% der Daten sind $> z_\alpha$.

23.2. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeit

Grundsituation

Man geht von einem Versuch, der im Prinzip beliebig oft unabhängig wiederholbar ist, aus. Betrachtet werden die Ereignisse, die bei diesem Versuch eintreffen können oder auch nicht.

A = Ereignis
Stichprobe vom Umfang n: Versuch wird n mal durchgeführt.

Relative Häufigkeit von A in der Stichprobe

$$h(A) = \frac{\text{Anzahl Durchführungen wo eingetroffen}}{n}$$

Wahrscheinlichkeit von A

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(A) \quad \text{wobei} \quad 0 \leq P(A) \leq 1$$

Ereignisse

Ereignisse sind Aussagen über das Ergebnis des Versuchs \rightarrow man kann sie mit boolschen Operatoren verknüpfen:

- $A \cup B$: A oder B mindestens eines von beiden
- $A \cap B$: A und B beide
- \bar{A} : Nicht A

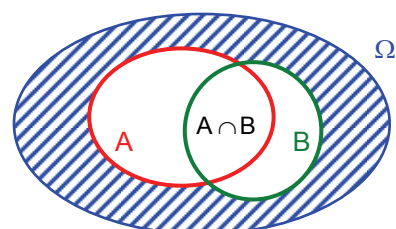
De Morgansche Regeln

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad , \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Elementarereignisse

Ω = Menge der Elementarereignisse (= mögliche Ausgänge des Versuchs). Von diesen kommt bei jeder Durchführung genau eines vor.

Ein allgemeines Ereignis A entspricht der Menge von Elementarereignissen, die A wahr machen. A ist also eine Teilmenge von Ω .



23.3. Hilfsmittel aus der Kombinatorik

Permutation

Eine Anordnung von n Kugeln (allgemein: Elementen) in einer bestimmten Reihenfolge heisst Permutation. Für die Anzahl der möglichen Permutationen gilt:

1. Alle n Kugeln sind voneinander Verschieden:

$$P(n) = n!$$

Beispiel

Hat man 3 verschiedene Kugeln gibt es $P(3) = 3! = 6$ verschiedene Möglichkeiten die drei Kugeln anzuordnen.

2. Unter den n Kugeln befinden sich jeweils n_1, n_2, \dots, n_k einander gleiche Kugeln:

$$P(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!} \quad \text{mit } n_1 + n_2 + \dots + n_k = n \text{ und } k \leq n$$

Beispiel

In einer Urne befinden sich 5 Kugeln, 3 weisse und 2 rote. Sie lassen sich auf

$$P(5; 3, 2) = \frac{5!}{3!2!} = 10 \text{ verschiedene Arten anordnen.}$$

Kombinationen

Aus einer Urne mit n verschiedenen Kugeln werden nacheinander k Kugeln entnommen und in beliebiger Weise angeordnet (Urnenmodell). Eine solche Anordnung heisst Kombination k -ter Ordnung. Für die Anzahl der möglichen Kombinationen k -ter Ordnung gilt:

1. Die Ziehung der k Kugeln erfolgt ohne Zurückzulegen (sog. Kombination k -ter Ordnung ohne Wiederholung)

$$C(n; k) = \binom{n}{k} \quad \text{mit } k \leq n$$

2. Die Ziehung der k Kugeln erfolgt mit Zurücklegen (sog. Kombinationen k -ter Ordnung mit Wiederholung)

$$C_w(n; k) = \binom{n+k-1}{k} \quad \text{mit } k = 1, 2, 3, \dots$$

Beispiel

Einer Warenlieferung von 10 Glühbirnen soll zu Kontrollzwecken eine Stickprobe von 3 Glühbirnen entnommen werden. Es gibt dann

$$C(10; 3) = \binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$$

verschiedene Möglichkeiten, aus den 10 Glühbirnen 3 auszuwählen.

Variationen

Einer Urne mit n verschiedenen Kugeln werden nacheinander k Kugeln entnommen und in der Reihenfolge ihrer Ziehung angeordnet. Eine solche Anordnung heisst Variation k -ter Ordnung. Für die Anzahl der möglichen Variationen k -ter Ordnung gilt:

- Die Ziehung der k Kugeln erfolgt ohne Zurücklegen (sog. Variation k -ter Ordnung ohne Wiederholung)

$$V(n;k) = \frac{n!}{(n-k)!} \quad \text{mit } k \leq n$$

- Die Ziehung der k Kugeln erfolgt mit Zurücklegen (sog. Variation k -ter Ordnung mit Wiederholung)

$$V_w(n;k) = n^k \quad \text{mit } k = 1, 2, 3, \dots$$

Beispiel

Bei einem 100-Meter-Lauf starten 8 Läufer. Für die 3 ersten Plätze gibt es Medaillen (Gold, Silber, Bronze). Wieviel verschiedene Zieleinläufe für die ersten 3 Plätze sind möglich?

$$V(8;3) = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 = 336$$

23.4. Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten

- Für das zum Ereignis A komplementäre Ereignis \bar{A} gilt:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

- Additionssatz für zwei beliebige Ereignisse A und B :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Additionssatz für zwei sich gegenseitig ausschliessende Ereignisse A und B :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- Ist das Eintreten des Ereignisses B unabhängig davon, ob das Ereignis A bereits eingetreten ist oder nicht und umgekehrt, so heissen die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

23.5. Bedingte Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit $P(A/B)$ für das Eintreten des Ereignisses A unter der Bedingung oder Voraussetzung, das Ereignis B bereits eingetreten ist beträgt:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{oder} \quad P(A/B) = \frac{P(A) \cdot P(B/A)}{P(B)}$$

Beispiel

Zufallsexperiment: Wurf eines homogenen Würfels

- A: gerade Augenzahl \rightarrow $A = \{2, 4, 6\}$ mit $P(A) = 1/2$
 B: Augenzahl 6 \rightarrow $B = \{6\}$ mit $P(B) = 1/6$

$$A \cap B = \{6\} \text{ mit } P(A \cap B) = 1/6 \quad \rightarrow \quad P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

$P(B/A)$ ist dabei die Wahrscheinlichkeit dafür, die Augenzahl 6 zu erhalten, wenn bereits bekannt ist, dass die gewürfelte Augenzahl gerade ist.

Multiplikationssatz

Die Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Eintreten der Ereignisse A und B beträgt:

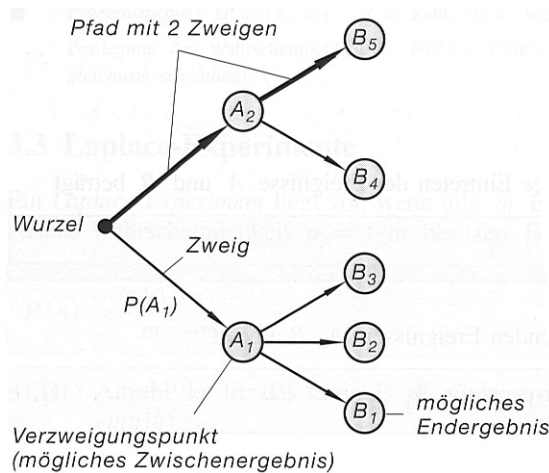
$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$$

Entsprechend bei drei gleichzeitig eintretenden Ereignissen A, B, und C:

$$P(A \cap B \cap C) = P(B) \cdot P(A/B) \cdot P(C/A \cap B)$$

23.6. Wahrscheinlichkeitsgraph

Ein mehrstufiges Zufallsexperiment besteht aus mehreren nacheinander ablaufenden Zufallsexperimenten.



A_1, A_2 :
Verzweigungspunkte
(mögliche Ergebnisse der 1. Stufe,
d.h. Zwischenergebnisse)

B_1, \dots, B_5 :
Mögliche Endergebnisse

$$P(A_2) = 1 - P(A_1)$$

Pfadregeln

Die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten längs bestimmter Pfade (die aus mehreren Zweigen bestehen) geschieht mit Hilfe der folgenden Pfadregeln:

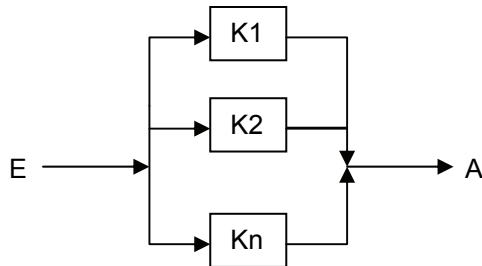
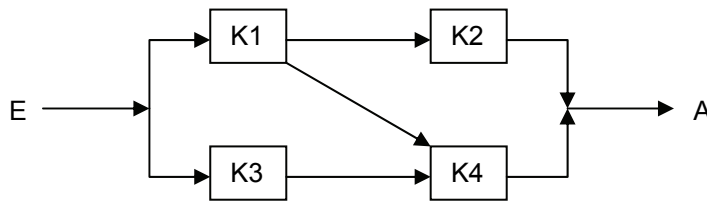
1. Die Wahrscheinlichkeiten längs eines Pfades werden miteinander multipliziert.
2. Führen mehrere Pfade zum gleichen Endergebnis, so addieren sich ihre Wahrscheinlichkeiten.

23.7. Intaktwahrscheinlichkeit

Betrachtet wird ein System S, das aus den Komponenten K_1, K_2, \dots zusammengesetzt ist, von denen die Intaktwahrscheinlichkeiten p_1, p_2, \dots bekannt sind.

Will man die $P(S) = P(\text{"System funktioniert"})$ aus den $P_i = P(K_i) = P(\text{"K}_i \text{ funktioniert"})$ berechnen, muss man wissen, wie das Funktionieren von S abhängig ist vom Funktionieren der K_i .

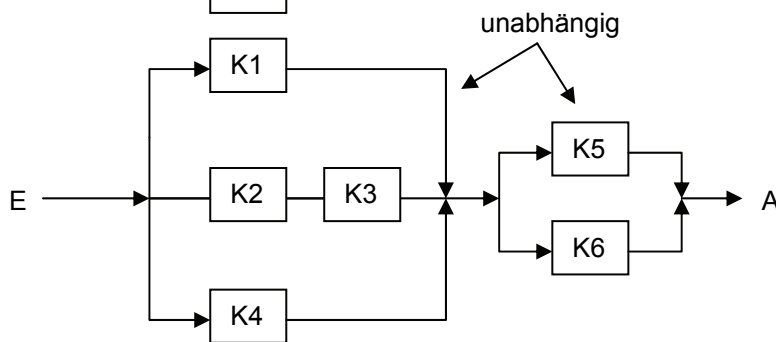
S funktioniert, wenn es einen Weg von E nach A gibt, auf dem alle K's funktionieren.



$$P(S) = 1 - P(\bar{S})$$

$$P(S) = 1 - P(\bar{K}_1 \cap \bar{K}_2 \cap \dots \cap \bar{K}_n)$$

$$P(S) = 1 - (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) \cdot \dots \cdot (1 - p_n)$$



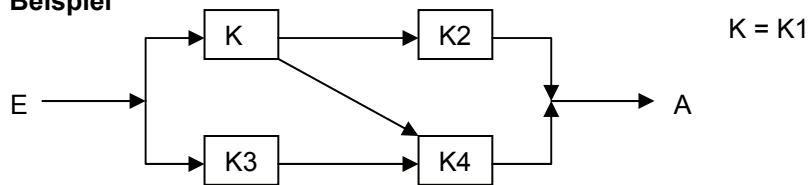
$$P(S) = (1 - (1 - p_1)(1 - p_2 \cdot p_3)(1 - p_4)) \cdot (1 - (1 - p_5)(1 - p_6))$$

Reduktionsmethode

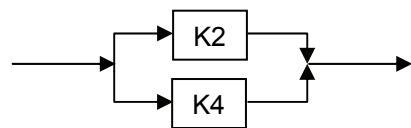
Bei der Reduktionsmethode legt man einen Bezugsknoten K fest und untersucht welche Wege von K nach A führen und für den Fall das K ausgefallen ist, welche Wege nicht über K nach A führen.

$$P(S) = P(K) \cdot P(S/K) + (1 - P(K)) \cdot P(S/\bar{K})$$

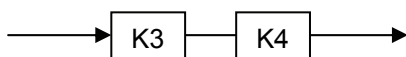
Beispiel



Falls K intakt (S/K) ist führt je ein Weg entweder über K2 oder K4:



Falls K defekt (S/\bar{K}) ist gibt es nur ein Weg über K3 und K4:



$$\rightarrow P(S) = p_1(1 - (1 - p_2)(1 - p_4)) + (1 - p_1) \cdot p_3 \cdot p_4$$

23.8. Zufallsvariablen

Eine Zufallsvariable X ist eine numerische Grösse, die vom Ausgang des Versuchs (d.h. vom eingehenden Elementarereignis) abhängt.

Beispiel

Werfen von drei Würfeln: Elementarereignisse $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$

$X =$ Summe der Augenzahlen $\rightarrow X(\omega) = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$

mögliche Werte: 3, 4, ..., 18

Man unterscheidet zwischen zwei Sorten von Zufallsvariablen:

- a) **X diskret**, d.h. die möglichen Werte sind isolierte Werte auf der Zahlengerade.
- b) **X kontinuierlich**, d.h. die Menge der möglichen Werte bildet ein Intervall in \mathbb{R} .

Verteilungsfunktion F_x

In beiden Fällen a) und b) möchte man die Verteilungsfunktion F_x (x meistens weggelassen) bestimmen:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Wenn X kontinuierlich:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

Wenn die Verteilungsfunktion bekannt ist, können alle anderen Wahrscheinlichkeiten daraus berechnet werden:

a) X diskret:

$$P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$$

$$P(X = a) = P(X \leq a) - P(X < a) = P(X \leq a) - P(X \leq a_-) = F(a) - F(a_-)$$

wobei a_- der nächst kleinere Wert ist.

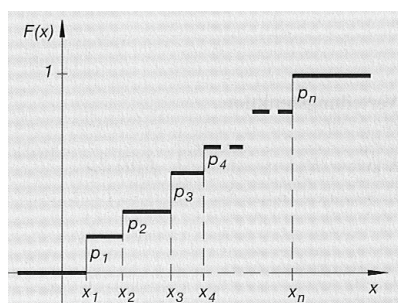
$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X < a) = F(b) - F(a_-)$$

b) X kontinuierlich und $P(X = a) = 0$ für alle a

$$P(X < a) = P(X \leq a) = F(a)$$

$$P(X \geq a) = P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$



Verteilungsfunktion (Treppenfunktion)

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

Beispiel für $f(x_i)$: $f(x) = P(X = x)$

Wahrscheinlichkeitsdichte

Nimmt man an, dass die Verteilungsfunktion differenzierbar ist (meistens erfüllt) erhält man durch deren Ableitung die Wahrscheinlichkeitsdichte f von X :

$$f = F' \Rightarrow f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

d.h. für kleine Δx gilt:

$$f(x) \cdot \Delta x \approx F(x + \Delta x) - F(x) = P(x \leq X \leq x + \Delta x)$$


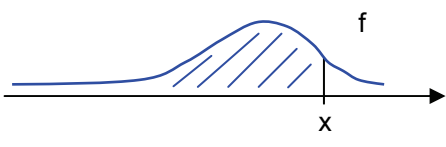
Die Wahrscheinlichkeitsdichte f überstreicht jeweils eine Fläche von 1.

In der Praxis ist f manchmal bekannt, oder sie kann statistisch geschätzt werden. (weil man $P(x \leq X \leq x + \Delta x)$ statistisch schätzen kann)

Übersicht: Zufallsvariablen

X : Zufallsvariable

$$F(x) = P(X \leq x) \text{ Verteilungsfunktion}$$

| X diskret | X kontinuierlich |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $f(x) = P(X = x)$ | $f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X \leq x + \Delta x)}{\Delta x}$ |
| Wahrscheinlichkeitsfunktion:  <p>mögliche Werte von X</p> | Dichtefunktion, Wahrscheinlichkeitsdichtefkt.  |
| $F(x) = \sum_{\omega \leq x} f(\omega)$ mit $\omega \in W$ $W =$ Menge der möglichen Werte von X | $F(x) = \int_{-\infty}^x f(\omega) d\omega$ |
| $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a_-)$ $= \sum_{a \leq X \leq b} f(\omega)$ mit $\omega \in W$ | $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$ $= \int_a^b f(\omega) d\omega$ |
| $\sum_{\omega \in W} f(\omega) = 1$ | $F(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ $= \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) d\omega$ $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ |

23.9. Binominalverteilung

Wir haben einen Versuch V und ein Ereignis A mit Wahrscheinlichkeit $p = P(A)$. Das Ereignis A entspricht einem "Erfolg".

$V^{(n)}$: V n -mal durchgeführt, "Stichprobe vom Umfang n "

Zufallsvariable X zu $V^{(n)}$: $X = \text{Anzahl Erfolge}$ $W = \{0, 1, 2, \dots, n\}$

Dichtefunktion f :
$$f(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Verteilungsfunktion F :
$$F(k) = \sum_{i=0}^k f(i) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$$

23.10. Normalverteilung (Gaussverteilung)

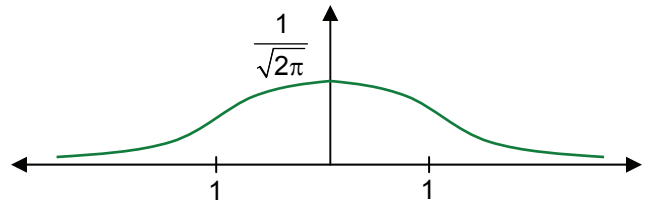
Gauss sagte: Wenn X Summe ist von vielen unabhängigen Zufallsvariablen, die etwa von der gleichen Grössenordnung sind, dann ist die Dichtefunktion von X :

$$f(x) \approx \varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Standart-Normal-Verteilung

Spezialfall $\mu = 0, \sigma = 1$

$$\varphi(x) = \varphi_{0,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$



Verteilungsfunktion:

$$\Phi(x) = \varphi_{0,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}u^2} du = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

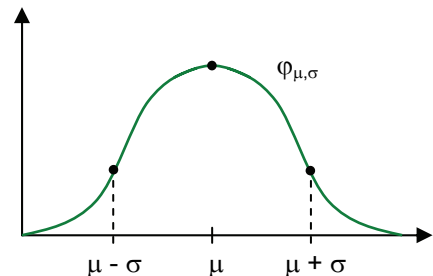
Übergang

$$\varphi \Rightarrow \varphi_{\mu,\sigma}$$

- Strecken mit dem Faktor σ in x -Richtung
- Strecken mit dem Faktor $1/\sigma$ in y -Richtung
- Schieben um μ in x -Richtung

σ : Standartabweichung

μ : Erwartungswert



$$\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\varphi(-x) = 1 - \varphi(x)$$

23.11. Approximation der Binominalverteilung

Die Binominalverteilung kann durch die Normalverteilung approximiert werden:

$$\mu = n \cdot p \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

Beispiel

1000 Würfe mit einem Würfel

$$\mu = n \cdot p = 1000 \cdot \frac{1}{6} = 166.\bar{6} \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{1000 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)} \approx 11.8$$

$$P(160 \leq X \leq 170) = F(170.5) - F(159.5)$$

$$P(160 \leq X \leq 170) \approx \Phi\left(\frac{170.5 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{159.5 - \mu}{\sigma}\right)$$

$$P(160 \leq X \leq 170) \approx \Phi(0.325) - \Phi(-0.608)$$

$$P(160 \leq X \leq 170) \approx 0.6274 - 0.27 \approx \underline{\underline{0.36}}$$

Faustregel

Falls $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \geq 3$ ist die Approximation der Binominalverteilung durch die Normalverteilung für praktische Zwecke genügend.

23.12. Erwartungswert einer Zufallsvariablen

Der Erwartungswert $E(x)$ ist der statistische Mittelwert von X , d. h.

$$E(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

$E(X)$ kann auch aus f bzw. F ausgerechnet werden:

Diskret

Kontinuierlich

$$E(X) = \sum_{\omega \in W} f(\omega) \cdot \omega$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x \, dx$$

Beispiel

X = Augensumme zweier Würfel

$$E(X) = \frac{1}{36} \cdot 2 + \frac{2}{36} \cdot 3 + \frac{3}{36} \cdot 4 + \frac{4}{36} \cdot 5 + \frac{5}{36} \cdot 6 + \frac{6}{36} \cdot 7 + \frac{5}{36} \cdot 8 + \frac{4}{36} \cdot 9 + \frac{3}{36} \cdot 10 + \frac{2}{36} \cdot 11 + \frac{1}{36} \cdot 12$$

$$E(X) = 7$$

Rechenregeln

a) $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$

b) $E(a \cdot X) = a \cdot E(X)$

- c) $E(X_1 \cdot X_2) \neq E(X_1) \cdot E(X_2)$ im allgemeinen
- d) Falls X_1 und X_2 voneinander unabhängig sind (d.h. der Wert des einen beeinflusst den Wert des anderen nicht) gilt:

$$E(X_1 \cdot X_2) = E(X_1) \cdot E(X_2)$$

23.13. MTTF (Mean Time to Failure)

Unter MTTF versteht man den Erwartungswert $E(T)$. Wobei T die Lebensdauer eines Geräts ist. Die Verteilungsfunktion F und die Dichtefunktion f hängen mit der Ausfallrate λ zusammen:

$$F(t) = P(T \leq t) \quad f(t) = F'(t)$$

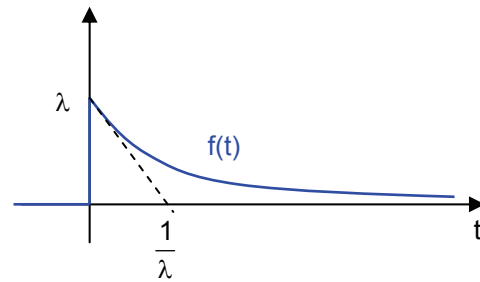
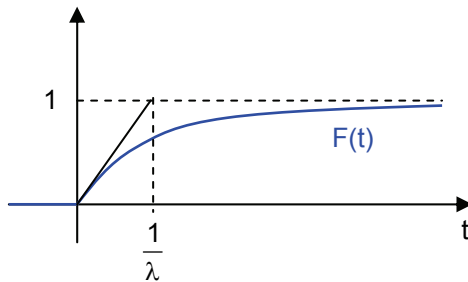
$$\lambda(t) = \frac{F'(t)}{1-F(t)} \quad \text{Somit lautet die Verteilungsfunktion } F: \quad F(t) = u(t) \cdot \left(1 - e^{-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau} \right)$$

wobei $u(t)$ = Sprungfunktion

Exponentialverteilung

Ist die Ausfallrate λ konstant, so spricht man von einer Exponentialverteilung:

$$\lambda \text{ konst.} \Rightarrow \begin{cases} F(t) = u(t) \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot t}) \\ f(t) = u(t) \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} \end{cases}$$



$$MTTF = E(T) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot t \, dt = \lambda \cdot \int_0^{\infty} t \cdot e^{-\lambda \cdot t} dt = \lambda \cdot \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$$

Die Exponentialverteilung findet man z.B. beim radioaktiven Zerfall (Gerät entspricht einem Atom, λ konstant, weil Atome nicht altern). In der Technik wird sie häufig als Näherung verwendet.

Weibull-Verteilung

Folgende Verteilung mit den Parametern a und b nennt man Weibull-Verteilung (wenn $b = 1$ entspricht die Weibull-Verteilung einer Exponentialverteilung):

$$F(t) = 1 - e^{-a \cdot t^b}$$

Ausfallrate λ : $\lambda(t) = a \cdot b \cdot t^{b-1}$

$$\text{MTTF} = E(T) = a^{-\frac{1}{b}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{b} + 1\right)$$

wobei $\Gamma()$ die Gaussche Gamma-Funktion entspricht. $\Gamma()$ ist in der ganzen \mathbb{C} definiert ausser bei $0, -1, -2, \dots$ (dort hat sie Pole).

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}$$

23.14. Varianz mit Standardabweichung

Die Varianz ist ein Mass für die Streuung der Werte von X um $E(X)$ herum.

Varianz: $V(X) = E((X - E(X))^2)$

Standardabweichung: $S(X) = \sqrt{V(X)}$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Kontinuierlich

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) \, dx - \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \, dx \right)^2}_{E(X)^2}$$

Diskret

$$V(X) = \sum_{x \in W_x} x^2 \cdot f(x) - \underbrace{\left(\sum_{x \in W_x} x \cdot f(x) \right)^2}_{E(X)^2}$$

Rechenregeln

1) $V(a \cdot X) = a^2 \cdot V(X)$

2) $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2)$ falls X_1 und X_2 unabhängig sind voneinander

X binominalverteilt

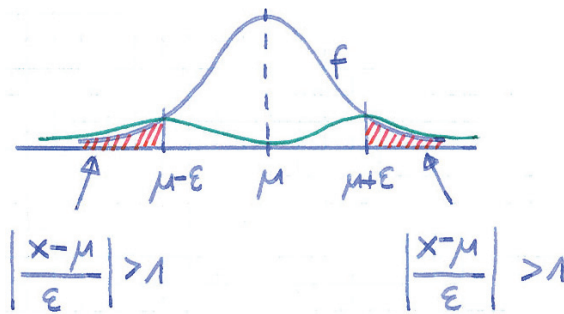
Wird eine Binominalverteilung mit einer Normalverteilung approximiert, so werden Varianz V und Standardabweichung S wie folgt berechnet:

$$E(X) = n \cdot p$$

$$V(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$$

$$S(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

23.15. Ungleichung von Tschebyscheff



$$\mu = E(X) \quad \sigma = S(X)$$

$$P(|X - \mu| > \epsilon) = \int_{-\infty}^{\mu - \epsilon} f(x) dx + \int_{\mu + \epsilon}^{\infty} f(x) dx$$

$$P(|X - \mu| > \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

23.16. Lebensdauer von Systemen

- a) Wir haben 2 Komponenten mit Lebensdauer T_1 und T_2 . Die zweite Komponente dient als Reserve und wird erst in Betrieb genommen, wenn die erste ausfällt.

Gesamtlebensdauer: $T = T_1 + T_2$

Erwartungswert: $E(T) = E(T_1) + E(T_2)$

Varianz: $V(T) = V(T_1) + V(T_2)$ (falls T_1 und T_2 unabhängig)



Gesamtlebensdauer: $T = \min(T_1, T_2)$

Verteilungsfunktion: $F_T(t) = P(T \leq t) = P((T_1 \leq t) \cup (T_2 \leq t))$
 $F_T(t) = 1 - P((T_1 > t) \cap (T_2 > t))$
 $F_T(t) = 1 - P(T_1 > t) \cdot P(T_2 > t)$
 $F_T(t) = 1 - (1 - F_{T_1}(t)) \cdot (1 - F_{T_2}(t))$
 $F_T(t) = F_{T_1}(t) + F_{T_2}(t) - F_{T_1}(t) \cdot F_{T_2}(t)$

Für den Spezialfall, dass T_1 und T_2 exponentialverteilt mit Auffallraten λ_1 und λ_2 :

Verteilungsfunktion: $F_T(t) = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}$

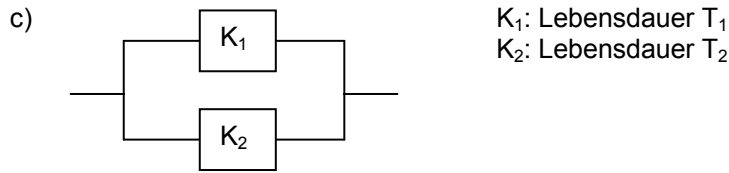
Erwartungswert: $E(T) = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}$

Fazit

Bei Serieschaltung von Komponenten mit exponentialverteilter Lebensdauer ist die Lebensdauer des Systems wieder exponentialverteilt:

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots$$

$$E(T) = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots}$$



Gesamtlebensdauer: $T = \max(T_1, T_2)$

Verteilungsfunktion: $F_T(t) = P(T \leq t) = P((T_1 \leq t) \cap (T_2 \leq t))$
 $F_T(t) = P(T_1 \leq t) \cdot P(T_2 \leq t)$
 $F_T(t) = F_{T_1}(t) \cdot F_{T_2}(t)$

Für den Spezialfall, dass T_1 und T_2 exponentialverteilt mit Auffallraten λ_1 und λ_2 :

Verteilungsfunktion: $F_T(t) = 1 - e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t} + e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}$

→ nicht wieder exponentialverteilt!

Erwartungswert: $E(T) = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}$

Varianz: $V(T) = \frac{2}{\lambda_1^2} + \frac{2}{\lambda_2^2} - \frac{2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2} - \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^2$

Für den Spezialfall, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$:

Erwartungswert: $E(T) = \frac{3}{2 \cdot \lambda}$

Varianz: $V(T) = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{\lambda^2}$

Standartabweichung: $S(T) = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot S(T_1)$

23.17. Integrationsmethoden

Für Erwartungswerte

$$E(T) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot t \, dt$$

$$= \lambda \cdot \int_0^{\infty} t \cdot e^{-\lambda \cdot t} dt = \lambda \cdot \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$$

Für Varianzen

$$V(T) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot f(t) \, dt - E(T)^2$$

$$= \lambda \cdot \int_0^{\infty} t^2 \cdot e^{-\lambda \cdot t} dt - \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 = \lambda \cdot \frac{2}{\lambda^3} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$f(t) = 3\lambda \cdot e^{-\lambda t} - 6\lambda \cdot e^{-2\lambda t} - 3\lambda \cdot e^{-3\lambda t} \Rightarrow E(T) = \int_0^{\infty} t \cdot f(t) \, dt = 3\lambda \cdot \frac{1}{\lambda^2} - 6\lambda \cdot \frac{1}{(2\lambda)^2} - 3\lambda \cdot \frac{1}{(3\lambda)^2}$$

24. MATLAB

| Befehl | Bedeutung |
|---------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Syntax | |
| [1 2 ...] | Zeilenvektor |
| [... ;... ;...] | Matrix Zeilenumbruch mit ; |
| [u v] | Setzt mehrere Vektoren zu einem Zusammen |
| ~= | Ungleich \neq |
| Mathematische Funktionen | |
| abs | Absolutbetrag |
| exp | Exponentialfunktion mit Basis e |
| log | Natürlicher Logarithmus |
| log10 | Logarithmus mit Basis 10 |
| round | Runden auf die nächstliegende ganze Zahl |
| imag | Imaginärteil einer komplexen Zahl |
| real | Realanteil einer komplexen Zahl |
| angle | Argument einer komplexen Zahl |
| conj | Konjugieren einer komplexen Zahl |
| eye(m) | Eine mxm Einheitsmatrix |
| 3D- und Vektorplots | |
| plot3(x,y,z) | 3D-Plot sonst wie Plot |
| contour(x,y,z,n) | Niveaulinien n : Niveaulinien die gezeichnet werden Niveau 0 als [0 0] einsetzen |
| meshgrid(x,y) | Erzeugt eine Matrix mit der Grösse length(x) mal length(y) usw. für beliebig viele Dimensionen. Wird verwendet als Grundlage für mehrdimensionale Plots. Beispiel: x=[0 1 2]; y=[4 5 6]; [xx yy]=meshgrid(x,y) ans : xx=[0 1 2 ;0 1 2 ;0 1 2] yy=[4 4 4 ;5 5 5 ;6 6 6] |
| mesh(x,y,z) | Gittermodell |
| meshc(x,y,z,n) | Gittermodell mit Niveaulinien |
| quiver(x,y,u,v) | Vektorfeld 2-Dimensional x : Zeilenvektor der x-Koordinaten y : Zeilenvektor der y-Koordinaten u,v: Matrizen, mit [length(x) length(y)], beschreiben die Vektoren an den Schnittpunkten der x- und y-Koordinaten |
| surf(x,y,z) | Flächenmodell |
| Matrizen | |
| m(x,:) | Die x-te Zeile von m |
| m(:,x) | Die x-te Spalte von m |
| ones(m,n) | Einsmatrix der Dimension m mal n |
| zeros(m,n) | Nullmatrix der Dimension m mal n |
| eye(m,m) | Einheitsmatrix der Dimension m mal m |
| det(m) | Determinante von m |
| inv(m) | Inverse Matrix von m |
| min(m) | Index des kleinsten Wert von m |
| max(m) | Index des grössten Wert von m |
| sum(m) | Summe aller Elemente von m |
| m' | Transportierte Matrix von m Achtung: Falls die Matrix aus komplexen Elementen besteht, werden diese konjugiert. |
| Diverse Funktionen | |

| | |
|------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| trapez(x,y) | Integration mit Trapeznäherung $x = f(x)$ |
| quad('...', a,b) | <p>Quad verwendet die Simpson-Formel mit adaptiv angepasster Schrittweite</p> <p>a,b: Grenzen</p> <p>'...': Name des m-Files in dem die Funktion gespeichert ist.</p> <p>m-File:</p> <pre>function y = '...' (x,...) y = ;</pre> |
| reshape(x,mxn) | Gibt eine m mal n Matrix dessen Elemente kolonnenweise aus x ausgelesen wurden. x muss m mal n Elemente haben. |
| rand(m,n) | Erzeugt eine reelle m mal n Matrix, deren Elemente reelle gleichverteilte Zufallszahlen im Zahlenintervall $[0, 1[$ sind. |